

Минск «Асар» 1998

Адукацыйны партал www.adu.by

В.В.Шлыков
Т.В.Валаханович

Задачи по стереометрии



10-11

В.В.Шлыков
Т.В.Валаханович

Задачи по стереометрии

Учебное пособие
для 10—11 классов
общеобразовательной школы
с русским языком обучения

Допущено Министерством
образования Республики
Беларусь



Минск
«Асар»
1998

БИБЛИОТЕКА
СРЕДНЕЙ
ШКОЛЫ

УДК 514.113.(075.3)
ББК 22.151.Оя 721
Ш 69

В оформлении книги использованы рисунки В.В. Шлыкова

Ш 69 Шлыков В.В., Валаханович Т.В.
Задачи по стереометрии: Учеб. пособие для 10 – 11 кл.
общеобразоват. шк. с рус. яз. обучения / Рис. В.В. Шлыков. –
Мн.: Асар, 1998. – 240с.: ил.

ISBN 985-6070-47-3.

ББК 22.151.Оя 721

© «Асар», 1998
© В.В. Шлыков,
Т.В. Валаханович, 1998
© Оформление.
А.А. Кулаженко,
Г.И. Мацур, 1998

ISBN 985-6070-47-3

Оглавление

Предисловие.....	4
1. Призма.....	6
1.1. Формулы, задачи.....	6
1.2. Задачи.....	12
1.3. Ответы и указания.....	19
2. Параллелепипед. Куб.....	36
2.1. Формулы, задачи.....	36
2.2. Задачи.....	44
2.3. Ответы и указания.....	57
3. Пирамида.....	88
3.1. Формулы, задачи.....	88
3.2. Задачи.....	94
3.3. Ответы и указания.....	103
4. Цилиндр.....	128
4.1. Формулы, задачи.....	128
4.2. Задачи.....	133
4.3. Ответы и указания.....	145
5. Конус.....	172
5.1. Формулы, задачи.....	172
5.2. Задачи.....	177
5.3. Ответы и указания.....	190
6. Сфера. Шар.....	220
6.1. Формулы, задачи.....	220
6.2. Задачи.....	226
6.3. Ответы и указания.....	230

Предисловие

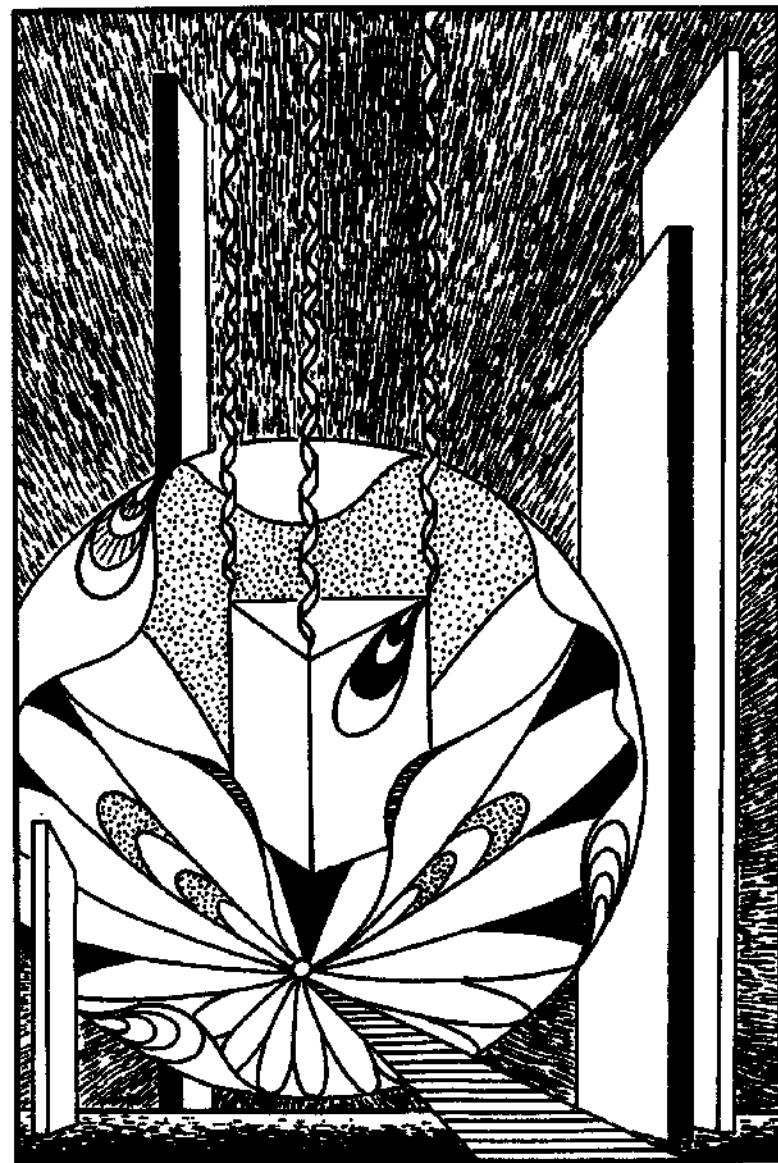
Предлагаемое пособие состоит из шести глав по конкретным темам стереометрии: призма; параллелепипед, куб; пирамида; цилиндр; конус; сфера, шар. В начале каждой главы приводятся теоретические факты и формулы стереометрии, применяемые при решении задач, затем рассматриваются решения некоторых типовых задач по данной теме и предлагаются задачи для самостоятельной работы. Для этих задач в конце каждой главы даны ответы и указания, которые приводятся в компактной пошаговой форме, что позволяет быстрее понять ход решения и в то же время требует от читателя осмысления и обоснования этих шагов.

Книга является логическим продолжением учебного пособия «Задачи по планиметрии» В.В. Шлыкова, изданного для учащихся 7 – 9 классов. Здесь сохранено такая же форма рисунка – необходимого опорного сигнала, способствующего усвоению изучаемого материала и развитию пространственных представлений у учеников, а также тематический подбор задач.

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ, гимназий, лицеев, изучающих стереометрию, а также для индивидуальной подготовки к выпускному или вступительному экзамену по математике. Оно будет полезно учителям для организации самостоятельной работы учащихся и обобщающего повторения материала по стереометрии.

1

Призма



1. ПРИЗМА

1.1. Формулы, задачи

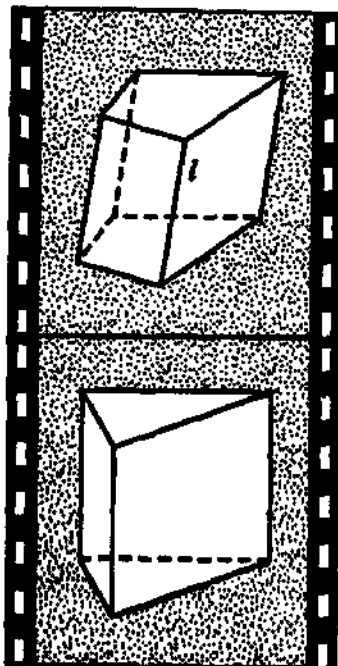


Рис. 1

1. Произвольная призма (l – боковое ребро; P – периметр основания; $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота; $P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; Q – площадь перпендикулярного сечения; V – объем) (рис. 1).

$$1) S_{бок} = P_{сеч} \cdot l;$$

$$2) S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн};$$

$$3) V = S_{осн} \cdot H;$$

$$4) V = Q \cdot l.$$

2. Прямая призма (P – периметр основания; l – боковое ребро)

$$S_{бок} = P \cdot l.$$

3. Сфера, вписанная в призму. Для того, чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

Центр вписанной в призму сферы лежит на прямой, проведенной параллельно боковым ребрам через центр окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, и является серединой отрезка, отсекаемого на этой прямой основаниями призмы.

4. Сфера, описанная около призмы. Для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

5. Сфера, вписанная в правильную призму. Для того, чтобы в правильную призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы ее высота равнялась диаметру окружности, вписанной в основание.

6. Сфера, описанная около правильной призмы. Около любой правильной призмы можно описать сферу.

Задача 1. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и наклонена к боковой грани под углом α . Вычислите площадь боковой поверхности и объем призмы.

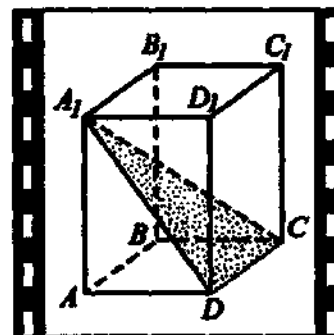


Рис. 2

Решение. По условию $A_1C = d$, $\angle CA_1D = \alpha$ (угол между A_1C и гранью AA_1D_1D есть угол между A_1C и ее ортогональной проекцией на AA_1D_1D). Из прямоугольного треугольника A_1DC ($\angle A_1DC = 90^\circ$) находим $A_1D = A_1C \cos \alpha = d \cos \alpha$, $DC = A_1C \sin \alpha = d \sin \alpha$.

В прямоугольном треугольнике A_1AD

$$\text{катет } AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - d^2 \sin^2 \alpha} = d \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

Данная призма правильная, следовательно, все боковые грани равны и

$$S_{бок} = 4S_{AA_1D_1D} = 4AD \cdot AA_1 = 4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha},$$

$$V = DC^2 \cdot AA_1 = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha} \text{ (рис. 2).}$$

Задача 2. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a . Через диагональ нижнего и вершину верхнего оснований проведена плоскость, пересекающая плоскости, содержащие две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми φ . Найдите объем призмы.

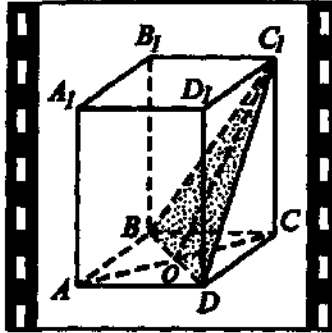


Рис. 3

Решение. По условию $AD = a$, $\angle BC_1D = \varphi$ (рис. 3). Из прямоугольного треугольника BCD ($\angle BCD = 90^\circ$) находим гипотенузу $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{2}$. Пусть O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$, тогда $OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Диагонали BC_1 и DC_1 граней равны, следовательно, медиана OC_1 равнобе-

ренного треугольника BC_1D является высотой и биссектрисой этого треугольника. В прямоугольном треугольнике C_1OD ($\angle C_1OD = 90^\circ$)

находим гипотенузу $C_1D = \frac{OD}{\sin(\frac{\varphi}{2})} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin(\frac{\varphi}{2})}$. В треугольнике C_1CD

$$(\angle C_1CD = 90^\circ) C_1C = \sqrt{C_1D^2 - DC^2} = \frac{a\sqrt{\cos \varphi}}{\sqrt{2} \sin(\frac{\varphi}{2})}.$$

$$\text{Таким образом, } V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = \frac{a^3 \sqrt{\cos \varphi}}{\sqrt{2} \sin(\frac{\varphi}{2})}.$$

Задача 3. В правильной треугольной призме проведено сечение, которое проходит через одну сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a , а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол, равный α .

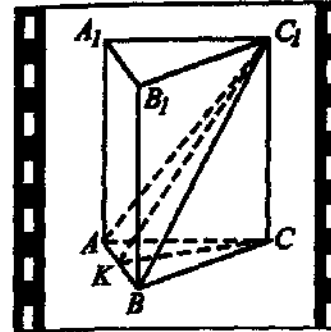


Рис. 4

Решение. Пусть K – середина отрезка AB . Тогда отрезок CK – ортогональная проекция отрезка C_1K на плоскость основания, значит, $\angle C_1KC = \alpha$. В прямоугольном треугольнике CKB ($\angle CKB = 90^\circ$) находим, что катет $CK = \sqrt{CB^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника C_1CK ($\angle C_1CK = 90^\circ$)

$$C_1K = \frac{CK}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cos \alpha}.$$

В треугольнике AC_1B отрезок C_1K является высотой ($AB \perp CK$, $AB \perp CC_1$ отсюда следует, что $AB \perp C_1K$).

$$\text{Таким образом, } S_{ABC_1} = \frac{AB \cdot C_1K}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4 \cos \alpha} \text{ (рис. 4).}$$

Задача 4. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом φ . Площадь боковой грани равна Q . Найдите объем призмы.

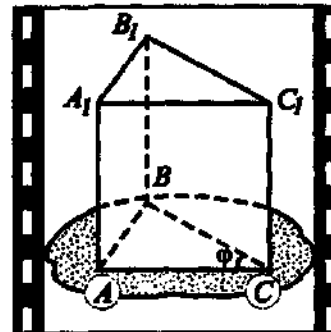


Рис. 5

Решение. Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = \varphi$. Обозначим $AA_1 = h$, $AC = x$. Тогда из равенства $Q = xh$ находим, что $h = \frac{Q}{x}$.

В прямоугольном треугольнике ABC $AB = x \sin \varphi$, $BC = x \cos \varphi$. Следовательно, $S_{ABC} = S = \frac{x^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2}$.

$$\text{Отсюда следует, что } x = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

$$\text{Таким образом, } h = \frac{Q\sqrt{\sin 2\varphi}}{2\sqrt{S}}.$$

$$\text{Теперь объем призмы } V = S_{ABC} \cdot h = \frac{Q\sqrt{S \sin 2\varphi}}{2} \text{ (рис. 5).}$$

Задача 5. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная a , составляет угол α с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

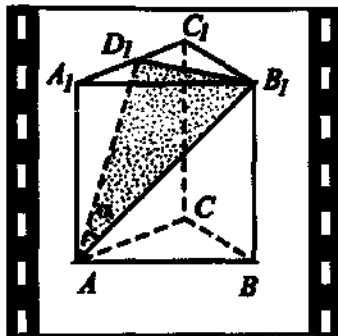


Рис. 6

Решение. Пусть $AB_1 = a$, D_1 – середина отрезка A_1C_1 (рис. 6). Тогда $B_1D_1 \perp A_1C_1$, $B_1D_1 \perp AA_1$. Отсюда следует, что B_1D_1 перпендикулярен плоскости AA_1C_1 . Таким образом, AD_1 – ортогональная проекция AB_1 на плоскость AA_1C_1 , следовательно, $\angle B_1AD_1 = \alpha$. Из треугольника

AD_1B_1 ($\angle AD_1B_1 = 90^\circ$) находим $B_1D_1 =$

$= AB_1 \sin \alpha = a \sin \alpha$. Из треугольника $A_1D_1B_1$ ($\angle A_1D_1B_1 = 90^\circ$) имеем

$$A_1D_1 = B_1D_1 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{3}}.$$

Площадь основания $S_{\text{осн}} = A_1D_1 \cdot B_1D_1 = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3}}$. Из треугольника

$$ABB_1 \left(AB = A_1C_1 = 2A_1D_1 = \frac{2a \sin \alpha}{\sqrt{3}} \right) \text{ по теореме Пифагора нахо-}$$

дим высоту призмы $BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Теперь объем призмы } V = S_{\text{осн}} \cdot BB_1 = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}}{3}.$$

Задача 6. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, в котором угол между равными сторонами 2α . Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней. Угол между этими диагоналями равен 2β . Найдите отношение площади боковой поверхности призмы к площади ее основания.

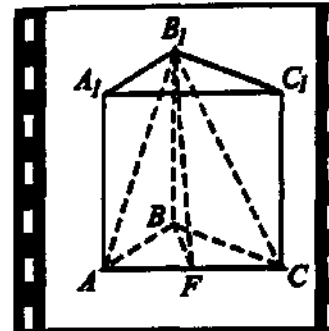


Рис. 7

Решение. Пусть $AB = BC = x$. По условию $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle AB_1C = 2\beta$. Обозначим F середину отрезка AC . Из прямоугольного треугольника AFB ($\angle AFB = 90^\circ$) находим, что $AF = x \sin \alpha$, $BF = x \cos \alpha$. В прямоугольном треугольнике AFB_1 ($\angle AFB_1 = 90^\circ$) $B_1F = AF \operatorname{ctg} \beta = x \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta$. В треугольнике B_1BF ($\angle B_1BF = 90^\circ$) катет

$$BB_1 = \sqrt{B_1F^2 - BF^2} = \frac{x \sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}{\sin \beta}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 2\alpha = \frac{x^2}{2} \sin 2\alpha.$$

$$S_{\text{бок}} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{AA_1C_1C} = \frac{2x^2(1 + \sin \alpha) \sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}{\sin \beta}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{S_{\text{бок}}}{S_{ABC}} = \frac{4(1 + \sin \alpha) \sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}}{\sin \beta \sin 2\alpha} \quad (\text{рис. 7}).$$

Задача 7. В основании призмы лежит правильный треугольник, сторона которого равна a . Одна из вершин верхнего основания проектируется в точку пересечения высот треугольника нижнего основания. Боковые ребра призмы наклонены к плоскости основания под углом, равным α . Найдите площадь боковой поверхности.

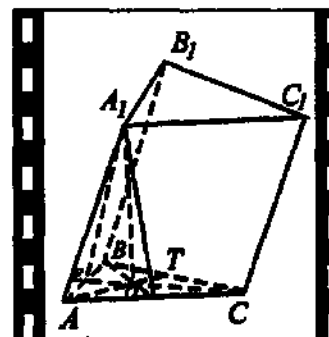


Рис. 8

Решение. Пусть O – точка пересечения высот AT и CE треугольника ABC . Прямая A_1O перпендикулярна BC (по условию A_1O перпендикулярна плоскости ABC) и $AO \perp BC$, следовательно, ребро AA_1 перпендикулярно BC . Аналогично доказываем, что $A_1E \perp AB$ ($OE \perp AB$, $A_1O \perp AB$). Из прямоугольного треугольника AOA_1 находим $AA_1 =$

$$= \frac{AO}{\cos \alpha} = \frac{a}{\sqrt{3} \cos \alpha} \quad (AO = \frac{2AT}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}). \text{ В прямоугольном треугольнике } AOA_1 \text{ катет } A_1O = AO \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}}. \text{ В треугольнике } A_1OE \text{ } (\angle A_1OE = 90^\circ) \text{ по теореме Пифагора } A_1E = \sqrt{AO^2 + OE^2} =$$

$$= \frac{a \sqrt{4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{2 \sqrt{3} \cos \alpha}. \text{ Теперь площадь боковой поверхности призмы}$$

$$S_{\text{бок}} = 2S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} = 2AB \cdot A_1E + BC \cdot BB_1 = \frac{a^2 \sqrt{4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{3} \cos \alpha} +$$

$$+ \frac{a^2}{\sqrt{3} \cos \alpha} = \frac{a^2}{\sqrt{3} \cos \alpha} (1 + \sqrt{4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}) \text{ (рис. 8).}$$

1.2. Задачи

1. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна a и составляет угол α с плоскостью другой боковой грани. Определите боковую поверхность призмы.
2. Основание прямой треугольной призмы – равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a , образуют угол α . Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол φ . Найдите объем призмы.
3. Найдите боковую поверхность правильной треугольной призмы высоты h , если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60° .
4. Высота правильной треугольной призмы равна h . Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол α . Найдите полную поверхность призмы.

5. В основании прямой четырехугольной призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона a равна меньшей стороне основания, а острый угол равен α . Найдите объем призмы, если высота ее равна диагонали основания.
6. В основании прямой четырехугольной призмы лежит равнобокая трапеция с острым углом α . Радиус вписанной в основание окружности равен R . Определите объем призмы, если ее высота равна H .
7. Найдите объем и площадь боковой поверхности прямой призмы, у которой в основании лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине α и противоположной стороной b , если диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β .
8. В правильной треугольной призме высота равна H , а диагональ боковой грани составляет с основанием угол α . Найдите объем призмы.
9. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если площадь основания призмы равна S и диагональ призмы образует с боковым ребром призмы угол α .
10. Определите объем правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее самая большая диагональ имеет длину d и составляет с боковым ребром призмы угол α .
11. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a ; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, меньшая диагональ которого равна c . Найдите объем призмы.
12. Каждое ребро наклонной треугольной призмы имеет длину a . Одно из боковых ребер образует с прилежащими к нему сторонами основания углы по 60° . Найдите площадь полной поверхности этой призмы.
13. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a . Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC и

- ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.
14. В основании призмы – равносторонний треугольник; радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен b . Одна из вершин призмы проектируется в центр основания. Боковое ребро призмы образует с плоскостью основания угол β . Найдите объем призмы.
15. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и середину противоположного ребра проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол в 60° . Площадь сечения равна $8\sqrt{3}$ см². Найдите объем и полную поверхность призмы.
16. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45° . Длина стороны основания равна a . Определите площадь боковой поверхности призмы.
17. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух боковых граней, проведенных из одной вершины, равен α . Найдите сторону основания призмы.
18. Равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α , и периметром, равным p , служит основанием прямой призмы. Угол между диагоналями равных боковых граней призмы, проведенными из одной вершины, равен β . Найдите объем призмы.
19. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a . Диагональ большей боковой грани и диагональ другой боковой грани, исходящие из одной вершины, образуют между собой угол α . Найдите объем призмы.
20. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , угол между диагоналями боковых граней, исходящими из одной вершины, равен β . Найдите объем призмы.

21. В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения, если площадь основания S , а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом α .
22. В правильной четырехугольной призме проведено сечение через диагональ основания и середину противоположного бокового ребра. Найдите площадь сечения, если периметр основания p , а диагональ боковой грани наклонена к основанию под углом φ .
23. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см². Найдите объем призмы.
24. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a , а угол при основании равен α . Определите объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.
25. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Высота призмы равна 2 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.
26. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом φ . Площадь большей боковой грани равна Q . Найдите объем призмы.
27. Диагонали прямой четырехугольной призмы составляют с основанием углы α и β . Высота призмы равна H . Определите объем призмы, если диагонали основания пересекаются под углом γ .
28. Основание прямой призмы – ромб с высотой h и острым углом α . Меньшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом β . Найдите объем призмы.

29. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см. Диагональ боковой грани призмы, проходящая через другой катет, составляет с плоскостью основания призмы угол 45° . Высота призмы равна 4. Найдите площадь полной поверхности призмы.
30. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник. Диагонали боковых граней призмы, проходящих через катеты, составляют с плоскостью основания призмы углы 30° и 60° . Высота призмы равна H . Найдите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.
31. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная призма, у которой диагональ боковой грани составляет с плоскостью основания угол α . Найдите объем призмы.
32. В шар радиуса R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H . Найдите объем призмы.
33. Сторона основания правильной четырехугольной призмы a , высота вдвое больше. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и центр симметрии призмы.
34. Длина каждого ребра правильной шестиугольной призмы равна 1 дм. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону основания и большую диагональ призмы.
35. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точку A и среднюю линию D_1E_1 основания $A_1B_1C_1$, параллельную B_1C_1 , проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.
36. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1 , BB_1 , CC_1 – боковые ребра), у которой $AC = 6$ см, $AA_1 = 8$ см. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N . Найдите, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN – биссектриса угла CAC_1 .

37. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определите площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной этой плоскостью, равен V .
38. Через сторону основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Определите площадь образовавшегося сечения, если объем треугольной призмы, отсеченной этой плоскостью, равен $\sqrt{18}$ см.
39. Основанием прямой призмы служит правильный треугольник со стороной 4. Точки K и E являются серединами ребер AB и BC соответственно, прямые EA_1 и KC_1 пересекаются под углом, равным φ . Определите объем призмы.
40. Основанием прямой призмы служит ромб $KBCD$ со стороной a и $\angle DKB = 60^\circ$. Концы B_1 и D_1 диагонали верхнего основания призмы соединены прямыми EB_1 и ED_1 с серединами сторон KD и KB нижнего. В пересечении этих прямых образуется угол B_1OD_1 , равный α . Определите объем призмы.
41. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найдите объем призмы, если известно, что прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны.
42. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точки B , C и A_1 проведено сечение, площадь которого равна S , а расстояние от плоскости сечения до вершины B_1 равно h . Найдите объем призмы.
43. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла соответственно равны α и β , а площадь равна S . Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол, равный φ . Найдите объем призмы.

44. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a . Точка D – середина ребра AB , точка E лежит на ребре AC_1 . Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C соответственно. Найдите высоту призмы.
45. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α . Найдите боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.
46. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α . Найдите объем призмы.
47. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найдите отношение поверхностей этих шаров.
48. В правильную шестиугольную призму вписан шар радиуса r . Найдите объем шара, описанного около этой призмы.
49. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$ и катет $AC = b$. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через гипотенузу AB , образует с боковой гранью, проходящей через катет AC , угол β . Найдите объем призмы.
50. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противолежащей данному углу, равна a и составляет с плоскостью основания угол β . Найдите объем призмы.

1.3. Ответы и указания

1. $2a^2 \sin \alpha \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}$.

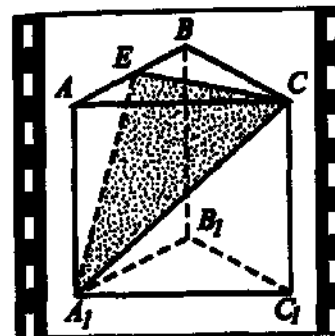


Рис. 9

Указание:

- 1) $AC = a$, $AE = BE$, $CE \perp ABA_1$, $\angle CA_1E = \alpha$ (рис. 9);
- 2) $\triangle CEA_1$, $\angle CEA_1 = 90^\circ$, $CE = a \sin \alpha$;
- 3) $\triangle CEA$, $\angle CEA = 90^\circ$, $AE = CE \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{3}}$, $AB = 2AE = \frac{2a \sin \alpha}{\sqrt{3}}$;
- 4) $P_{ABC} = 3AB = \frac{6a \sin \alpha}{\sqrt{3}}$;

5) $\triangle A_1C_1C$, $CC_1 = \sqrt{A_1C^2 - A_1C_1^2} = \frac{a\sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3}}$;

6) $S_{бок} = P_{ABC} \cdot CC_1 = 2a^2 \sin \alpha \sqrt{3 - 4 \sin^2 \alpha}$.

2. $\frac{a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \varphi}$.

3. $6h^2$.

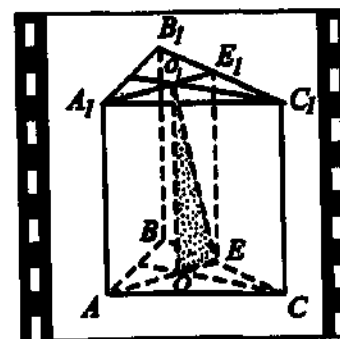


Рис. 10

Указание:

- 1) $OO_1 = h$, $\angle O_1EO = 60^\circ$, O , O_1 – центры равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 10);
- 2) $\triangle O_1OE$, $OE = h \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$,
 $AE = 3OE = h\sqrt{3}$;
- 3) $AB = x$, $\triangle ABE$, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2}$,

$$h\sqrt{3} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}. \text{ Отсюда } x = 2h;$$

$$4) S_{бок} = 3AB \cdot OO_1 = 6h^2.$$

$$4. 6\sqrt{3}h^2 \operatorname{ctg} \alpha (\operatorname{ctg} \alpha + 1).$$

$$5. 4a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

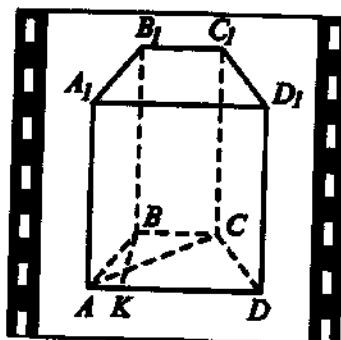


Рис. 11

Указание:

- 1) $AB = CD = BC = a$,
 $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$,
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = AC$,
 $BK \perp AD$ (рис. 11);
- 2) $\triangle AKB$, $BK = a \sin \alpha$, $AK = a \cos \alpha$,
 $AD = BC + 2AK = a + 2a \cos \alpha$;
- 3) $S_{осн} = \frac{(AD + BC)BK}{2} = 2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha$;

$$4) ABCD, \angle B = \pi - \alpha,$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B} = 2a \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$5) V = S_{осн} \cdot AA_1 = 4a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha.$$

$$6. \frac{4R^2 H}{\sin \alpha}.$$

$$7. \frac{b^3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \frac{b^2 \operatorname{tg} \beta \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

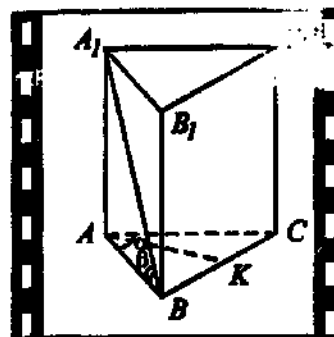


Рис. 12

Указание:

$$1) AB = AC, \angle BAC = \alpha, BC = b, \\ \angle A_1BA = \beta, BK = KC \text{ (рис. 12);}$$

$$2) \triangle AKB, AB = \frac{BK}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$3) \triangle ABC,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha = \frac{b^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{4};$$

$$4) \triangle A_1AB, AA_1 = AB \operatorname{tg} \beta = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{b^3 \operatorname{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$6) S_{бок} = (AB + AC + BC) \cdot AA_1 = \frac{b^2 \operatorname{tg} \beta \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$8. \frac{H^3 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4}.$$

$$9. 4\sqrt{2}S \operatorname{ctg} \alpha.$$

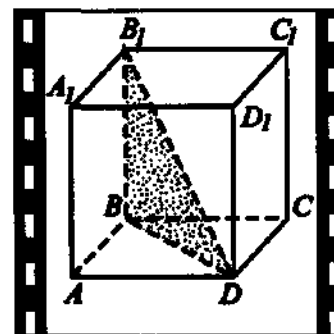


Рис. 13

Указание:

$$1) S_{ABCD} = S, \angle BB_1D = \alpha \text{ (рис. 13);}$$

$$2) ABCD, S = AD^2, AD = \sqrt{S}, \\ DB = \sqrt{2AD^2} = \sqrt{2S};$$

$$3) \triangle B_1BD, BB_1 = DB \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2S} \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$4) S_{бок} = 4AB \cdot BB_1 = 4\sqrt{2}S \operatorname{ctg} \alpha.$$

10. $\frac{3\sqrt{3}}{16} d^3 \sin 2\alpha \sin \alpha.$

11. $\frac{ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}}{8}.$

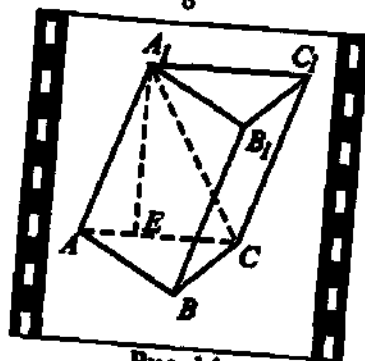


Рис. 14

Указание:

- 1) $AB = BC = AC = a$, $ABC \perp AA_1C_1C$,
 $AA_1 = A_1C_1$, $A_1C = c$, $A_1E \perp AC$,
 $\angle A_1AC = \alpha$ (рис. 14);

- 2) $\triangle AA_1C$,

$$\cos \alpha = \frac{AC^2 + AA_1^2 - A_1C^2}{2AC \cdot AA_1} = \frac{2a^2 - c^2}{2a^2};$$

- 3) $\triangle A_1EA$, $AE = AA_1 \cos \alpha = a - \frac{c^2}{2a}$,

$$A_1E = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = c\sqrt{1 - \frac{c^2}{4a^2}};$$

- 4) $\triangle ABC$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

5) $V = S_{ABC} \cdot A_1E = \frac{ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}}{8}.$

12. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + a^2.$

13. $\frac{a^2(\sqrt{6} + \sqrt{15})}{3}.$

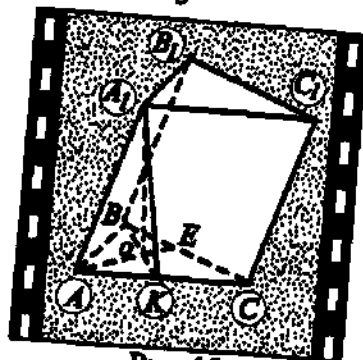


Рис. 15

Указание:

- 1) $BE = EC$, $AK = KC$, $A_1O \perp ABC$;

- 2) $A_1K \perp AC$, $\angle A_1AO = 45^\circ$ (рис. 15);

- 3) $\triangle AEC$, $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$OE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, AO = \frac{2AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

4) $\triangle AOA_1$, $AO = OA_1$, $AA_1 = \sqrt{AO^2 + OA_1^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$;

5) $\triangle A_1OK$, $A_1K = \sqrt{A_1O^2 + OK^2} = a\sqrt{\frac{5}{12}}$;

6) $S_{бок} = 2AC \cdot A_1K + BC \cdot BB_1 = a^2 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3}.$

14. $6\sqrt{3}b^3 \operatorname{tg} \beta.$

15. $48\sqrt{3} \text{ см}^3, 144 + 8\sqrt{3} \text{ см}^2.$

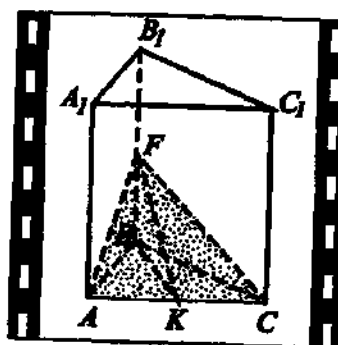


Рис. 16

Указание:

- 1) $AK = KC$, $BF = FB_1$, $\angle BKF = 60^\circ$,

$$S_{AFC} = 8\sqrt{3} \text{ (рис. 16);}$$

- 2) $AC = x$, $\triangle BKC$,

$$BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

- 3) $\triangle FBK$,

$$\angle KFB = 30^\circ \Rightarrow FK = 2BK = x\sqrt{3};$$

4) $S_{AFC} = \frac{AC \cdot FK}{2}$, $8\sqrt{3} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, $x = 4$;

5) $FK = 4\sqrt{3}$, $BK = 2\sqrt{3}$, $BF = \sqrt{FK^2 - BK^2} = 6$;

6) $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 48\sqrt{3}$, $S_{полн} = 2S_{ABC} + 3S_{AA_1C_1C} = 8\sqrt{3} + 144.$

16. $3\sqrt{3}a^2.$

17. $\frac{2\sqrt[3]{V \sin \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$

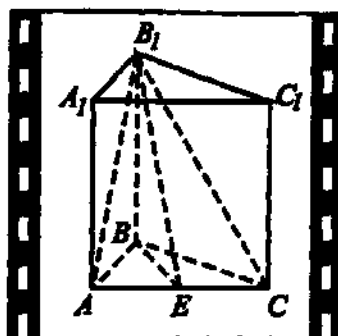


Рис. 17

Указание:

1) $\angle AB_1C = \alpha$, $AE = CE$, $AC = x$ (рис. 17);2) $\triangle B_1EC$, $B_1C = \frac{EC}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{x}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;3) $\triangle B_1BC$,

$$BB_1 = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \frac{x \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) V = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{x^3 \sqrt{3 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x = \frac{2 \sqrt[3]{V \sin \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$18. \frac{p^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{4 \sin \frac{\beta}{2} \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^3}.$$

$$19. \frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

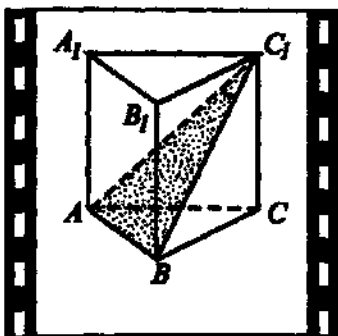


Рис. 18

Указание:

1) $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $\angle AC_1B = \alpha$, $\angle ABC_1 = 90^\circ$ (рис. 18);2) $\triangle ABC_1$, $AB \perp BC_1$, $BC_1 = AB \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha$;3) $\triangle BCC_1$,

$$CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \frac{a \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha};$$

$$4) S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{a^2}{2};$$

$$5) V = S_{ABC} \cdot CC_1 = \frac{a^3 \sqrt{\cos 2\alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

$$20. \frac{a^3 \sqrt{3 - 12 \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{8 \sin \frac{\beta}{2}}.$$

$$21. S \sqrt{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

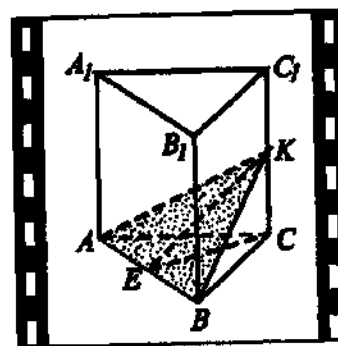


Рис. 19

Указание:

1) $S_{ABC} = S$, $\angle BAA_1B_1 = \alpha$, $KC_1 = KC$, $AE = BE$ (рис. 19);2) $\triangle ABC$, $AB = x$,

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin 60^\circ = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, x = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}},$$

$$CE = \frac{x \sqrt{3}}{2} = \sqrt{S \sqrt{3}};$$

3) $\triangle A_1B_1B$,

$$BB_1 = H = A_1B_1 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}};$$

4) $\triangle KCE$,

$$KC = \frac{H}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}}, KE = \sqrt{KC^2 + CE^2} = \frac{\sqrt{S \operatorname{tg}^2 \alpha + 3S}}{\sqrt{3}};$$

$$5) S_{\text{ср}} = \frac{AB \cdot KE}{2} = S \sqrt{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$22. \frac{p^3}{64} \sqrt{2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 4}.$$

23. $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$

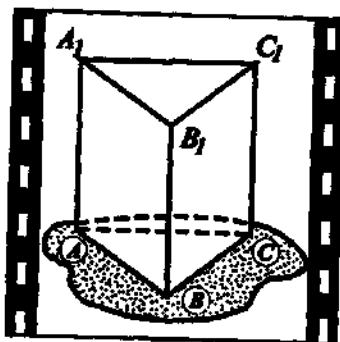


Рис. 20

Указание:

- 1) $AB = 3, BC = 5, \angle ABC = 120^\circ,$
 $S_{\triangle ABC} = 35$ (рис. 20);
- 2) $\triangle ABC,$
 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ} = 7;$
- 3) $S_{\triangle A_1C_1C} = AC \cdot AA_1, 35 = 7AA_1,$
 $AA_1 = 5;$
- 4) $\triangle ABC,$
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4};$
- 5) $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}.$

24. $\frac{a^3 \sin^2 \alpha}{8 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}.$

25. $36 \text{ см}^2.$

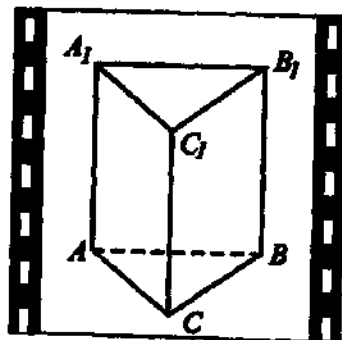


Рис. 21

Указание:

- 1) $AC = 4, CB = 3, \angle ACB = 90^\circ,$
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 2$ (рис. 21);
- 2) $\triangle ABC, AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 5,$
 $S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 6;$
- 3) $S_{бок} = P_{осн} \cdot AA_1 = 24;$
- 4) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{ABC} = 36.$

26. $\frac{Q}{2} \sqrt{S \sin 2\varphi}.$

27. $\frac{H^3}{2} \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$

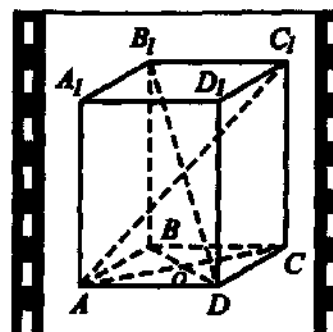


Рис. 22

Указание:

- 1) $\angle B_1DB = \beta, \angle C_1AC = \alpha, \angle BOA = \gamma,$
 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = H$ (рис. 22);
- 2) $\triangle B_1BD, BD = BB_1 \operatorname{ctg} \beta = H \operatorname{ctg} \beta;$
- 3) $\triangle C_1CA, AC = CC_1 \operatorname{ctg} \alpha = H \operatorname{ctg} \alpha;$
- 4) $S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \gamma =$
 $= \frac{H^2}{2} \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta;$
- 5) $V = S_{осн} \cdot H = \frac{H^3}{2} \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$

28. $\frac{h^3 \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}.$

29. $60 \text{ см}^2.$

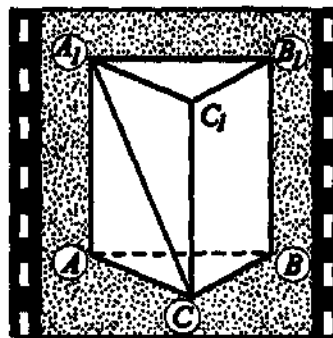


Рис. 23

Указание:

- 1) $BC = 3, \angle ACB = 90^\circ, \angle A_1CA = 45^\circ,$
 $AA_1 = 4$ (рис. 23);
- 2) $\triangle A_1AC, AA_1 = AC = 4;$
- 3) $\triangle ABC, AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5;$
- 4) $S_{полн} = 2 \frac{AC \cdot CB}{2} +$
 $+ (AC + BC + AB) AA_1 = 60.$

30. $\frac{H^2}{\sqrt{3}} (4 + \sqrt{10}), H^3.$

31. $\frac{8R^3 \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 2)^2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}.$

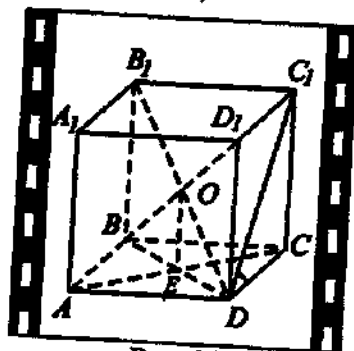


Рис. 24

Указание:

1) $\angle C_1DC = \alpha$, O — центр описанного шара, $OD = R$, $BE = ED$, $DC = x$ (рис. 24);

2) $\triangle ABD$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = x\sqrt{2}$,
 $ED = \frac{BD}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}};$

3) $\triangle C_1CD$, $CC_1 = DC \operatorname{tg} \alpha = x \operatorname{tg} \alpha$,
 $OE = \frac{CC_1}{2} = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2};$

4) $\triangle OED$, $OD^2 = OE^2 + ED^2$, $R^2 = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} + \frac{x^2}{2};$

5) $x = \frac{2R}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}}$, $DC = \frac{2R}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}}$, $CC_1 = \frac{2R \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}};$

6) $V = AD \cdot DC \cdot CC_1 = \frac{8R^3 \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 2)^2}.$

32. $\frac{3\sqrt{3}}{16} H(4R^2 - H^2).$

33. $\frac{9a^2}{4}.$

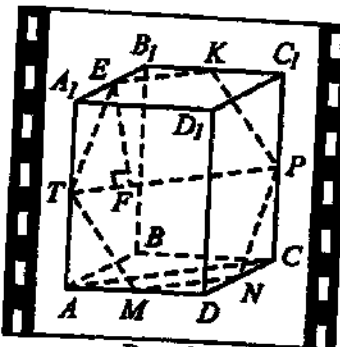


Рис. 25

Указание:

1) $DC = a$, $CC_1 = 2a$, M , N , P , K , E , T — середины соответствующих ребер.
 $EF \perp PT$ (рис. 25);

2) $\triangle ADC$, $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$,
 $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}};$

3) $TEKP$, $PT = a\sqrt{2}$, $EK = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $TF = \frac{PT - EK}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}};$

4) $\triangle ABB_1$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{5}$, $TE = \frac{AB_1}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$

5) $\triangle EFT$, $EF = \sqrt{ET^2 - TF^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}};$

6) $S_{сек} = 2S_{TEKP} = 2 \left(\frac{TP + EK}{2} \cdot EF \right) = \frac{9a^2}{4}.$

34. $3 \text{ дм}^2.$

35. $1 : 11.$

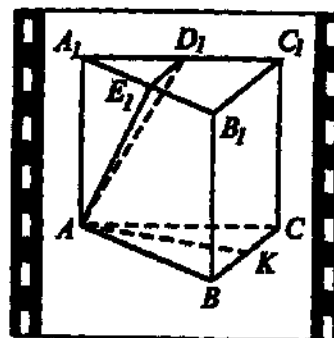


Рис. 26

Указание:

1) $A_1D_1 = D_1C_1$, $A_1E_1 = E_1B_1$, $BC = x$,
 $BC \perp AK$, $AK = h$, $CC_1 = H$,
 $V_1 = V_{A_1D_1E_1A}$, $V_2 = V_{E_1D_1C_1B_1ABC}$,
 $V = V_{ABC A_1B_1C_1}$ (рис. 26);

2) $V = S_{ABC} \cdot CC_1 = \left(\frac{BC \cdot AK}{2} \right) \cdot CC_1 = \frac{xhH}{2};$

3) $V_1 = \frac{1}{3} S_{A_1E_1D_1} \cdot AA_1 = \frac{xhH}{24};$

4) $V_2 = V - V_1 = \frac{11}{24} xhH$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{11}.$

36. $\frac{7}{17}.$

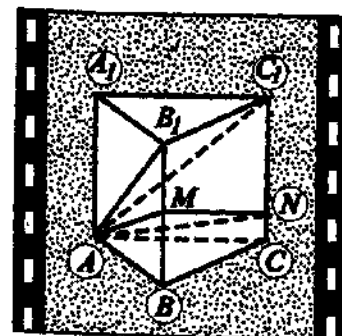


Рис. 27

Указание:

1) $AC = 6$, $AA_1 = 8$, $B_1M = MB$,
 $\angle C_1AN = \angle NAC$, V — объем призмы;

2) $\frac{V_{ACBMN}}{V_{ACBB_1C_1}} = \frac{S_{BMNC}}{S_{BB_1CC_1}}$ (рис. 27);

3) $\triangle ACC_1$,

$AC_1 = \sqrt{CC_1^2 + AC^2} = 10$, $\frac{CN}{NC_1} = \frac{3}{5};$

$$4) S_{CBMN} = \frac{(BM + CN) \cdot BC}{2} = \frac{7BC}{2}, S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC = 8BC,$$

$$S_{BMNC} : S_{BB_1C_1C} = 7 : 16;$$

$$5) V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1};$$

$$6) V_{AAB_1C_1} = \frac{1}{3} V \Rightarrow V_{ACBB_1C_1} = \frac{2}{3} V, V_{ACBMN} = \frac{7}{24} V;$$

$$7) V_{AAB_1C_1MN} = V - \frac{7}{24} V, V_{ACBMN} : V_{AAB_1C_1MN} = 7 : 17.$$

$$37. \frac{\sqrt{3} \sqrt{V^2 \operatorname{tg} \alpha}}{\sin \alpha}.$$

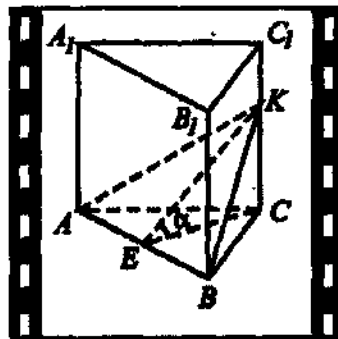


Рис. 28

Указание:

$$1) AE = BE, \angle KEC = \alpha, BC = x \text{ (рис. 28);}$$

$$2) \triangle ABC, EC = BC \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$3) \triangle KCE, CK = EC \operatorname{tg} \alpha = \frac{x\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2},$$

$$KE = \frac{KC}{\sin \alpha} = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cos \alpha};$$

$$4) V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot CK, V = \frac{x^3 \operatorname{tg} \alpha}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8V}{\operatorname{tg} \alpha}}, KE = \sqrt[3]{\frac{8V}{\operatorname{tg} \alpha}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \alpha};$$

$$5) S_{\text{сск}} = \frac{1}{2} KE \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} \sqrt[3]{V^2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$38. 4\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$39. \frac{4\sqrt{3} \sqrt{9 - 12 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

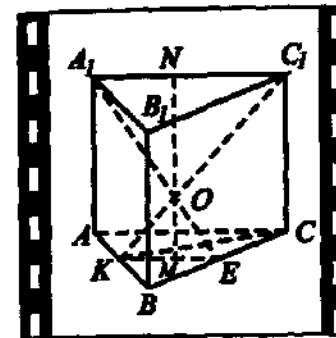


Рис. 29

Указание:

$$1) BC = 4, AK = KB, BE = EC, \angle KOE = \angle AOC_1 = \varphi, OM \perp KE, ON \perp AC_1 \text{ (рис. 29);}$$

$$2) \triangle ABC, KE = \frac{AC}{2} = 2, S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}, CK = 2\sqrt{3};$$

$$3) KM = ME, AN = NC_1;$$

$$4) \triangle KOE \sim \triangle AOC_1 \Rightarrow \frac{KO}{OC_1} = \frac{ME}{NC_1} \Rightarrow \frac{KO}{OC_1} = \frac{1}{2};$$

$$5) \triangle KOM, KO = \frac{KM}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}, OC_1 = 2OK = \frac{2}{\sin \frac{\varphi}{2}};$$

$$6) \triangle C_1CK, KC_1 = OK + OC_1 = \frac{3}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$CC_1 = \sqrt{KC_1^2 - CK^2} = \frac{\sqrt{9 - 12 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}};$$

$$7) V = S_{ABC} \cdot CC_1 = \frac{4\sqrt{3} \sqrt{9 - 12 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$40. \frac{3a^3 \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}{8 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

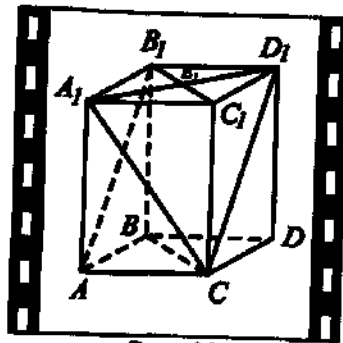
41. $8\sqrt{6}$.

Рис. 30

Указание:

- 1) $B_1D_1 \parallel AC_1, CD_1 \parallel AB_1 \Rightarrow$
 $\angle ACD_1 = 90^\circ, AC = CD_1$ (рис. 30);
- 2) $\triangle A_1E_1C_1, A_1E_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - E_1C_1^2} = 2\sqrt{3},$
 $A_1D_1 = 2A_1E_1 = 4\sqrt{3};$
- 3) $\triangle A_1CD_1, A_1D_1^2 = 2A_1C^2,$
 $A_1C = 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{6};$

$$4) \triangle A_1AC, A_1A = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = 2\sqrt{2};$$

$$5) S_{ABC} = A_1E_1 \cdot \frac{B_1C_1}{2} = 4\sqrt{3}, V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 8\sqrt{6}.$$

42. Sh .

$$43. S \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

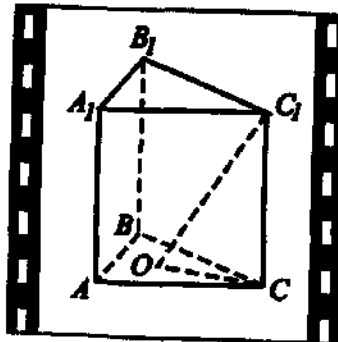


Рис. 31

Указание:

- 1) $S_{ABC} = S, O$ — центр описанной окружности, R — радиус, $\angle BAC = \alpha,$
 $\angle ABC = \beta, \angle C_1OC = \varphi, BC = a,$
 $AB = c, AC = b$ (рис. 31);
- 2) $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta,$
 $c = 2R \sin(\alpha + \beta);$

$$3) S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta),$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}};$$

$$4) \triangle C_1CO, CC_1 = R \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}};$$

$$5) V = S \cdot CC_1 = S \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}}.$$

$$44. \frac{a\sqrt{3} \sin \alpha}{4 \sin \beta}.$$

$$45. \frac{4p^2 \sin 2\alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2}.$$

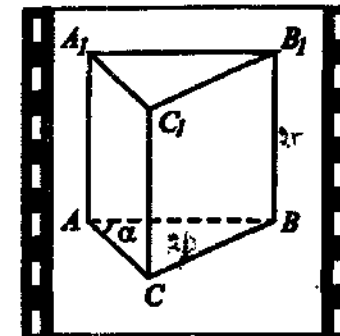


Рис. 32

Указание:

- 1) $P_{ABC} = 2p, \angle ACB = 90^\circ, \angle BAC = \alpha,$
 $BB_1 = 2r$, где r — радиус вписанного шара (рис. 32);

- 2) $\triangle ABC, CB = x \sin \alpha, AC = x \cos \alpha,$
 $2p = AC + CB + BA = x(1 + \sin \alpha + \cos \alpha),$

$$x = \frac{2p}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha};$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{p^2 \sin 2\alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2},$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{p \sin 2\alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2};$$

$$4) BB_1 = 2r = \frac{2p \sin 2\alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2}, S_{бок} = P_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{4p^2 \sin 2\alpha}{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)^2}.$$

$$46. \frac{2h^3(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{\sin^2 2\alpha}.$$

$$47. \frac{1}{5}$$

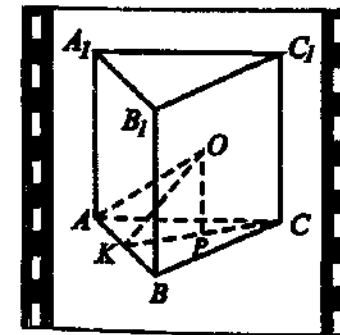


Рис. 33

Указание:

- 1) $AK = KB, O$ — центр вписанного и описанного шаров, $AO = R$ — радиус описанного шара, P — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC, PK = r$ — ее радиус, $BC = a, S_1, S_2$ — поверхность вписанного и описанного шаров;

$$2) \triangle CKB, CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$r = PK = \frac{CK}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ (рис. 33);}$$

$$3) \triangle OPK, OP = PK, OK = \sqrt{OP^2 + PK^2} = r\sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}, S_1 = 4\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{3};$$

$$4) \triangle OKA, OA = R = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{12}}, S_2 = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{5}.$$

$$48. \frac{28\pi r^3 \sqrt{21}}{27}.$$

$$49. \frac{b^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}{2 \cos \alpha \sin \beta}.$$

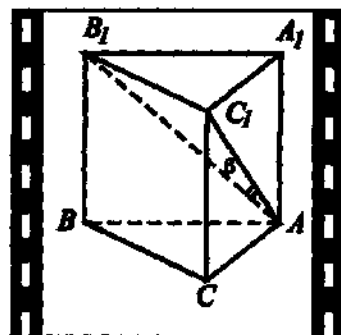


Рис. 34

Указание:

- 1) $\angle ACB = 90^\circ, \angle BAC = \alpha, AC = b$ (рис. 34);
- 2) AC_1 — ортогональная проекция AB_1 на грань AA_1C_1C , следовательно, $\angle B_1AC_1 = \beta$;
- 3) $\triangle ACB, BC = AC \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \alpha$;
- 4) $\triangle B_1C_1A (\angle C_1 = 90^\circ, B_1C_1 = BC = b \operatorname{tg} \alpha), AC_1 = B_1C_1 \operatorname{ctg} \beta = b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

$$5) \triangle C_1CA,$$

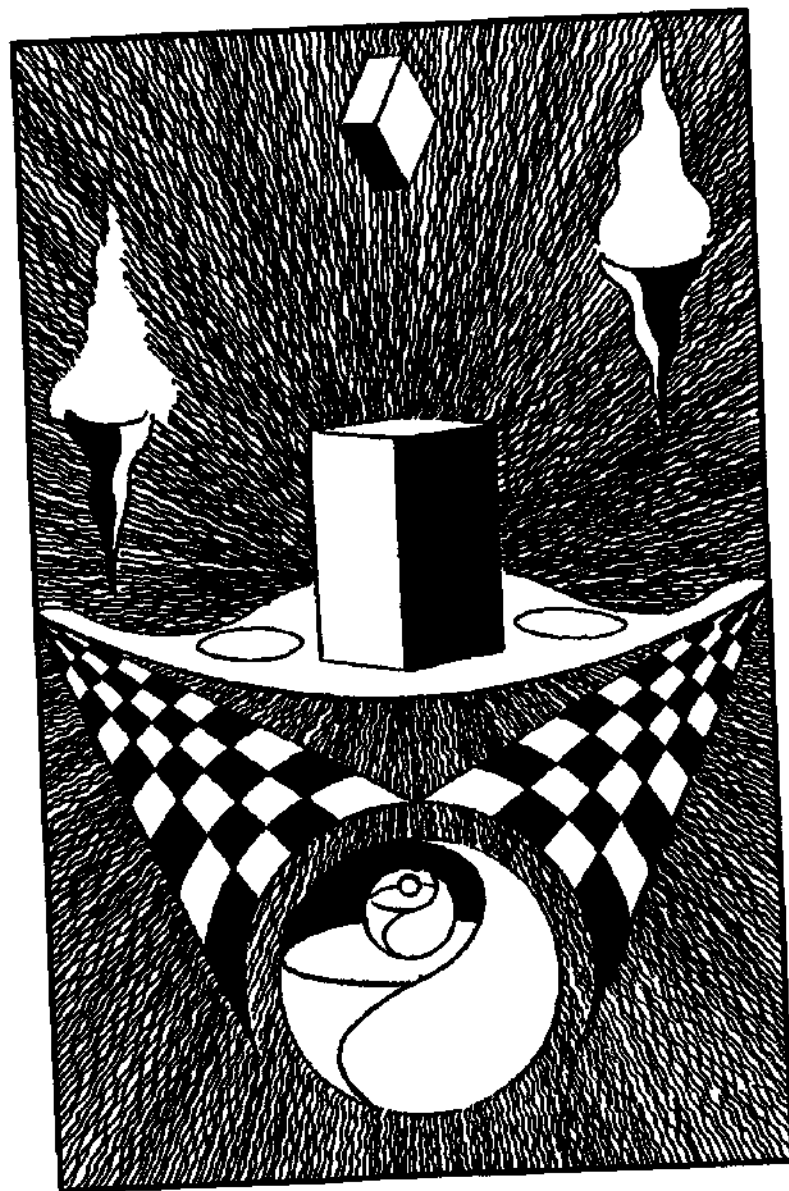
$$C_1C = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - b^2} = \frac{b \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$6) V = S_{ABC} \cdot C_1C = \frac{b^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}{2 \cos \alpha \sin \beta}.$$

$$50. \frac{a^3}{8} \cos \beta \sin 2\beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

2

Параллелепипед. Куб



2. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. КУБ

2.1. Формулы, задачи

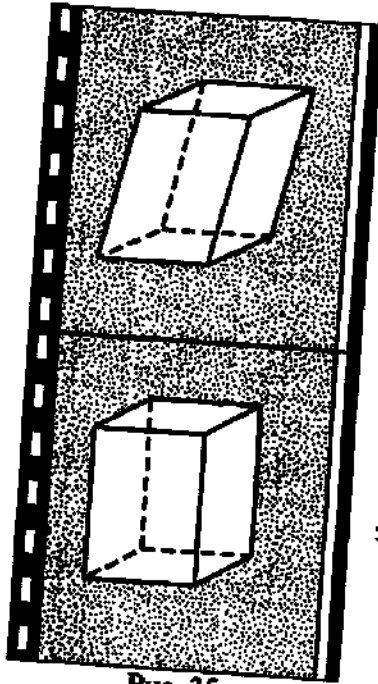


Рис. 35

Параллелепипедом называется призма, основанием которой является параллелограмм.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к основаниям, называется прямым.

Параллелепипед называется наклонным, если его боковые ребра не перпендикулярны к основаниям.

Прямой параллелепипед, у которого основание является прямоугольником, называется прямоугольным.

1. Произвольный параллелепипед (l – боковое ребро; P – периметр основания; $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота; $P_{сеч}$ – периметр сечения перпендикулярного боковым ребрам; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем)

$$1) S_{бок} = P_{сеч} l;$$

$$2) S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок};$$

$$3) V = S_{осн} \cdot H.$$

2. Прямой параллелепипед (l – боковое ребро; P – периметр основания)

$$S_{бок} = P \cdot l.$$

3. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c – измерения параллелепипеда; d – диагональ; P – периметр основания; H – высота; V – объем)

$$1) S_{бок} = PH;$$

$$2) d^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

$$3) V = abc.$$

4. Куб (a – ребро куба; d – диагональ; V – объем)

$$1) V = a^3;$$

$$2) d = a\sqrt{3}.$$

5. Диагонали параллелепипеда. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

6. Сфера, описанная около параллелепипеда. Для того, чтобы около параллелепипеда можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы это был прямоугольный параллелепипед.

7. Сфера, вписанная в параллелепипед. Для того, чтобы в параллелепипед можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы перпендикулярное сечение параллелепипеда являлось ромбом и чтобы высота параллелепипеда была равна диаметру окружности, вписанной в ромб.

Задача 1. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 см и 4 см и острым углом 60° . Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Найдите его объем.

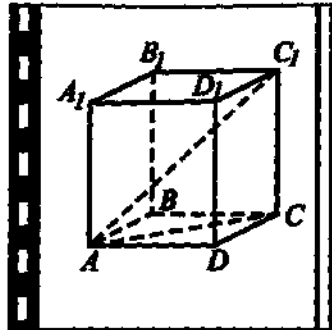


Рис. 36

Решение. Пусть $AB=1$ см, $AD=4$ см, $\angle BAD=60^\circ$, тогда большая диагональ $AC_1=5$ см (рис. 36). Объем параллелепипеда $V=S_{\text{осн}} \cdot CC_1$. Площадь основания $S_{\text{осн}}=AB \cdot AD \sin 60^\circ=2\sqrt{3}$ см². Высоту CC_1 параллелепипеда можно найти из прямоугольного треугольника ACC_1 ($\angle ACC_1=90^\circ$, $AC_1=5$ см). Для этого достаточно найти AC . По теореме косинусов $AC^2=$

$$=AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos 120^\circ = 21 \text{ см}^2.$$

В прямоугольном треугольнике ACC_1 катет $CC_1=\sqrt{AC_1^2 - AC^2}=2$ см.

Следовательно, $V=S_{\text{осн}} \cdot CC_1=4\sqrt{3}$ см³.

Задача 2. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b . Сторона основания равна a . Определите полную поверхность параллелепипеда.

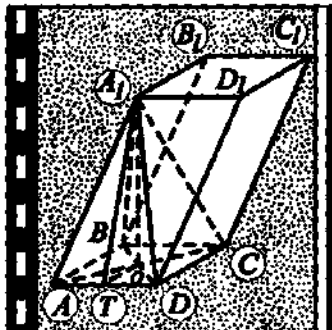


Рис. 37

Решение. Пусть точка O – центр основания $ABCD$ данного параллелепипеда, а вершина A_1 одинаково отстоит от вершин квадрата $ABCD$. Тогда отрезок A_1O является высотой (так как $A_1O \perp BD$ и $A_1O \perp AC$) параллелепипеда (рис. 37). Следовательно, $A_1O=b$.

Полная поверхность параллелепипеда $S_{\text{полн}}=2S_{\text{осн}}+4S_{AA_1D_1D}$. Пусть точка T –

середина AD , тогда отрезок A_1T является высотой параллелограмма AA_1D_1D (так как $AD \perp OT$ и $AD \perp A_1O$, то $AD \perp A_1T$). В прямо-

угольном треугольнике TOA_1 гипотенуза $A_1T=\sqrt{AO^2+OT^2}=\frac{\sqrt{4b^2+a^2}}{2}$. Площадь $S_{AA_1D_1D}=AD \cdot A_1T=\frac{a\sqrt{4b^2+a^2}}{2}$.

Таким образом, $S_{\text{полн}}=2a(a+\sqrt{4b^2+a^2})$.

Задача 3. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b . Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную b , под углом 30° . Найдите объем параллелепипеда.

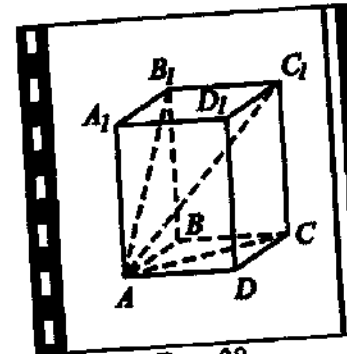


Рис. 38

Решение. Пусть $AD=a$, $AB=b$ стороны основания параллелепипеда (рис. 38). Тогда $\angle B_1AC_1=30^\circ$ (так как отрезок AB_1 – ортогональная проекция диагонали AC_1 на грань AA_1B_1B , а угол между AC_1 и этой гранью есть угол между диагональю AC_1 и ее ортогональной проекцией на данную грань). Из прямоугольного треугольника AB_1C_1 ($\angle AB_1C_1=$

$=90^\circ$, $\angle B_1AC_1=30^\circ$, $B_1C_1=a$) находим $AC_1=2a$. В прямоугольном треугольнике ACC_1 ($\angle ACC_1=90^\circ$, $AC_1=2a$, $AC=\sqrt{a^2+b^2}$)

катет $CC_1=\sqrt{AC_1^2 - AC^2}=\sqrt{3a^2 - b^2}$.

Следовательно, объем параллелепипеда $V=S_{\text{осн}} \cdot CC_1=ab\sqrt{3a^2 - b^2}$.

Задача 4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и образуют угол 30° . Боковая поверхность равна S . Определите объем параллелепипеда.

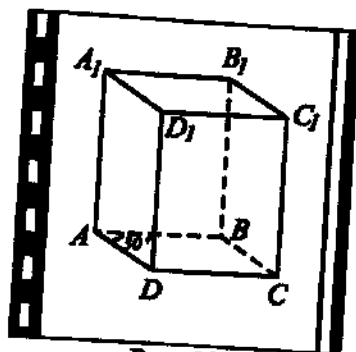


Рис. 39

Решение. Пусть $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = 30^\circ$ (рис. 39). По условию задачи боковая поверхность $S_{бок} = S = P_{осн} \cdot CC_1 = 2(a+b)CC_1$. Следовательно, высота па-

раллелепипеда $CC_1 = \frac{S}{2(a+b)}$.

Найдем площадь основания

$$S_{осн} = AB \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{ab}{2}.$$

Теперь объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot CC_1 = \frac{abS}{4(a+b)}$.

Задача 5. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 30° . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60° . Найдите полную поверхность параллелепипеда и его объем.

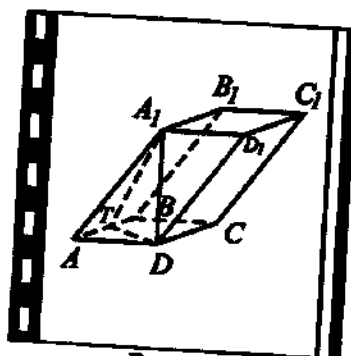


Рис. 40

Решение. Пусть $AB = AD = a$, $\angle BAD = 30^\circ$ и диагональ A_1D боковой грани перпендикулярна плоскости основания (рис. 40). Тогда $\angle A_1AD = 60^\circ$. Площадь

$$\text{основания } S_{осн} = AB \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике ADA_1 ($\angle ADA_1 = 90^\circ$, $\angle A_1AD = 60^\circ$, $AD = a$) катет

$$A_1D = AD \operatorname{tg} 60^\circ = a\sqrt{3}. \text{ Таким образом,}$$

объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot A_1D = \frac{\sqrt{3}}{2} a^3$. Площадь полной поверхности $S_{полн} = 2S_{осн} + 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B}$. Площадь $S_{AA_1D_1D} = AD \cdot A_1D = a^2\sqrt{3}$. Пусть $DT \perp AB$, тогда отрезок A_1T — высота параллелограмма AA_1B_1B ($AB \perp DT$, $AB \perp A_1D$, следовательно, AB перпендикулярна плоскости TDA_1). В прямоугольном тре-

угольнике TDA_1 ($\angle TDA_1 = 90^\circ$, $TD = \frac{a}{2}$, $A_1D = a\sqrt{3}$) гипотенуза

$$TA_1 = \sqrt{TD^2 + A_1D^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Таким образом, $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot A_1T = \frac{a^2\sqrt{13}}{2}$. Окончательно получа-

$$\text{ем } S_{полн} = a^2 + 2a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{13} = a^2(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{13}).$$

Задача 6. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a , и острым углом 60° . Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45° . Определите объем параллелепипеда.

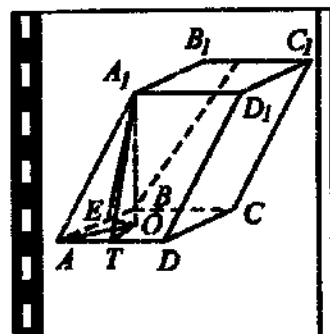


Рис. 41

Решение. Объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot H$. Площадь основания $S_{осн} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Пусть A_1O —

высота параллелепипеда, $OT \perp AD$, $OE \perp AB$, тогда $A_1T \perp AD$ и $A_1E \perp AB$. В прямоугольном треугольнике ATA_1 ($\angle ATA_1 = 90^\circ$, $\angle A_1AT = 45^\circ$, $AA_1 = a$) катет $AT =$

$$= TA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}. \text{ Аналогично, } AE = EA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Из равенства треугольников TOA_1 и EOA_1 ($\angle TOA_1 = \angle EOA_1 = 90^\circ$, A_1O — общая, $A_1T = A_1E$) следует, что $OT = OE$. Так как треугольник ATO равен треугольнику AEO (AO — общая сторона, $AT = AE$, $OT = OE$), то $\angle OAT = \angle OAE = 30^\circ$. В треугольнике ATO ($\angle ATO = 90^\circ$, $\angle OAT = 30^\circ$, $AT = \frac{a}{\sqrt{2}}$) катет $OT = AT \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Следовательно, в прямоугольном треугольнике TOA_1 катет $A_1O = \sqrt{TA_1^2 - OT^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, объем $V = S_{осн} \cdot A_1O = \frac{a^3}{2}$ (рис. 41).

Задача 7. Около сферы описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b . Определите полную поверхность параллелепипеда.

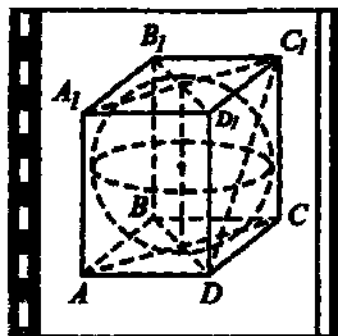


Рис. 42

Решение. Пусть $AC = a$, $BD = b$ (рис. 42). По условию задачи в прямой параллелепипед вписана сфера, следовательно, в его основание $ABCD$ можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте AA_1 параллелепипеда. Так как в параллелограмм $ABCD$ вписывается окружность, то $AB + CD = AD + BC$ или $2AB = 2AD$. Таким образом, основание параллелепипеда – ромб. Пусть $AD = x$,

тогда $a^2 + b^2 = 4x^2$. Отсюда $x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Диаметр вписанной в

ромб $ABCD$ окружности равен его высоте $h = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Следовательно, площадь полной поверхности $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + P_{ABCD} \cdot AA_1 = 2S_{\text{осн}} + P_{ABCD} \cdot h = ab + 2ab = 3ab$.

Задача 8. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длиной a , точка K – середина ребра AB , точка E – середина ребра DD_1 . Определите, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через точки K , E и A_1 .

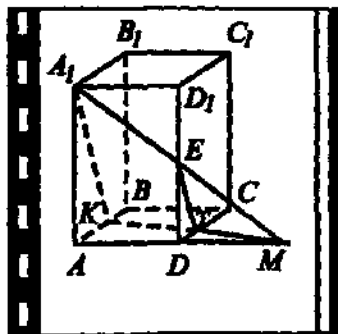


Рис. 43

Решение. Пусть $M = AD \cap A_1 E$, $T = KM \cap DC$, $V_{MAK A_1} = V_1$, $V_{MDTE} = V_2$.

$$\text{Тогда } V_1 = \frac{AA_1 \cdot AK \cdot AM}{6} = \frac{a^3}{6},$$

$$V_2 = \frac{DE \cdot DT \cdot DM}{6} = \frac{a^3}{48},$$

$$V_3 = V_{A_1 K E D T} = V_1 - V_2 = \frac{7a^3}{48}.$$

$$V_4 = V_{A_1 B_1 K D_1 C_1 T} = a^3 - \frac{7a^3}{48} = \frac{41a^3}{48}.$$

Следовательно, $V_3 : V_4 = 7 : 41$ (рис. 43).

Задача 9. Площади боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны S_1 , S_2 , S_3 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости BDC_1 .

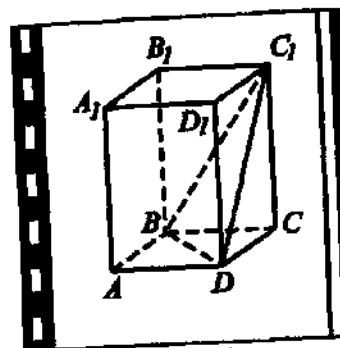


Рис. 44

Решение. Искомое расстояние d есть длина высоты H пирамиды $CBDC_1$ проведенной из вершины C , т.е. $d = H = \frac{3V_{CBDC_1}}{S_{BDC_1}}$. Пусть $S_{BDC_1} = S$. Так как плоские углы при вершине C пирамиды $CBDC_1$ прямые, то

$$S^2 = \frac{S_1^2}{4} + \frac{S_2^2}{4} + \frac{S_3^2}{4}.$$

Отсюда находим $S = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{2}$. Обозначим через x , y , z длины ребер параллелепипеда. Тогда $xy = S_1$, $yz = S_2$, $xz = S_3$. Перемножив почленно эти равенства, получаем $(xyz)^2 = S_1 S_2 S_3$, или $xyz = \sqrt{S_1 S_2 S_3}$. Таким образом, объем параллелепипеда равен $\sqrt{S_1 S_2 S_3}$. Объем пирамиды $CBDC_1$ равен одной шестой объема параллелепипеда, т.е. $V_{CBDC_1} = \frac{1}{6} \sqrt{S_1 S_2 S_3}$. Теперь расстояние от

$$\text{вершины } C \text{ до плоскости } BDC_1 \quad d = H = \frac{\frac{3}{6} \sqrt{S_1 S_2 S_3}}{\frac{1}{2} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{S_1 S_2 S_3}}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}} \quad (\text{рис. 44}).$$

2.2. Задачи

1. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1098 см^2 , а его измерения относятся как $3 : 4 : 7$. Определите объем параллелепипеда.
2. Определите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, объем которого равен 4320 см^3 , боковое ребро 18 см , а стороны основания относятся как $3 : 5$.
3. Меньшая диагональ прямого параллелепипеда равна 19 см , диагональ меньшей боковой грани 16 см , бо́льшая сторона основания 15 см и острый угол основания равен 60° . Определите объем параллелепипеда.
4. Полная поверхность прямого параллелепипеда равна 896 см^2 , а боковая – 672 см^2 . Меньшая из диагоналей основания равна $8\sqrt{2} \text{ см}$, а угол между нею и бо́льшей стороной основания равен 45° . Определите меньшую диагональ параллелепипеда.
5. Определите объем прямого параллелепипеда, диагонали которого равны 14 см и $4\sqrt{10} \text{ см}$, а диагонали боковых граней – 13 см и $3\sqrt{17} \text{ см}$.
6. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, стороны которого равны 6 см и 10 см , а меньшая диагональ его перпендикулярна меньшей стороне. Бо́льшая диагональ параллелепипеда равна 17 см . Определите объем и полную поверхность параллелепипеда.
7. Определите стороны основания прямого параллелепипеда, объем которого равен 3360 см^3 , полная поверхность равна 1416 см^2 , боковая поверхность – 1080 см^2 и бо́льшая диагональ параллелепипеда – 29 см .
8. Определите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 16 см , полная поверхность равна 168 см^2 и объем равен 108 см^3 .

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали основания AC и BD пересекаются в точке M , $\angle AMB = \alpha$. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $B_1 M = b$, $\angle BMB_1 = \beta$.
10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ , ее длина равна l , острый угол между диагоналями основания равен β . Определите объем параллелепипеда.
11. Основанием прямого параллелепипеда является ромб со стороной a и острым углом α . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β . Определите объем параллелепипеда.
12. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом α и бо́льшей диагональю m . Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β . Найдите объем параллелепипеда.
13. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β . Найдите угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.
14. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2} \text{ см}$ и образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем параллелепипеда, если одна сторона основания больше другой на 2 см .
15. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α , а с бо́льшей боковой гранью – угол β . Найдите объем параллелепипеда, если площадь его основания равна S .
16. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна a и образует с плоскостью основания угол α , а с одной из боковых граней – угол β . Найдите объем параллелепипеда.

17. Диагонали смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и $20\sqrt{2}$ см и наклонены к плоскости основания под углами, разность которых равна 45° . Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
18. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углом в 30° и 60° , а диагональ основания равна $\sqrt{30}$ см. Определите объем параллелепипеда.
19. В прямоугольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей нижнего основания соединена с серединой бокового ребра отрезком длиной m . Этот отрезок образует с основанием параллелепипеда угол α и с боковой гранью угол 2α . Найдите объем параллелепипеда.
20. Найдите площадь боковой поверхности и объем прямого параллелепипеда, если известно, что его высота равна h , диагонали его составляют с плоскостью основания углы α и β , а его основанием служит ромб.
21. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 2β , длина высоты которого равна h . Одна из диагоналей параллелепипеда образует с одной из боковых граней угол φ . Определите объем параллелепипеда.
22. Основание прямого параллелепипеда – ромб с острым углом φ и меньшей диагональю d . Найдите объем параллелепипеда, если большая диагональ его составляет с плоскостью боковой грани угол α .
23. Диагональ прямоугольного параллелепипеда имеет длину d и образует с двумя смежными боковыми гранями равные углы, величина которых равна α . Найдите объем параллелепипеда.
24. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, в котором диагонали боковых граней, выходящие из одной вершины, равны 4 см и 5 см и образуют угол в 60° .

25. В прямоугольном параллелепипеде одно из ребер основания имеет длину a и образует угол α с диагональю параллелепипеда и β с диагональю основания параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.
26. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 12 см, большая сторона основания равна 7 см, большая диагональ основания 9 см. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его большая диагональ образует с большей стороной основания угол в 60° .
27. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β . Найдите угол между этими диагоналями.
28. Диагонали AC_1 и B_1D прямого параллелепипеда с основанием $ABCD$ взаимно перпендикулярны и равны 3 дм и 4 дм. Определите объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно 19,2 см.
29. Основание прямого параллелепипеда – ромб, у которого меньшая диагональ равна d и острый угол равен α . Площадь боковой поверхности равна S . Найдите объем параллелепипеда.
30. В прямом параллелепипеде основанием служит ромб, острый угол которого α ; меньшая диагональ ромба равна d ; высота параллелепипеда равна $\frac{d}{2}$. Вычислите площадь поверхности параллелепипеда.
31. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами a , b и углом между ними в 30° . Найдите объем параллелепипеда, если его боковая поверхность равна S .
32. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 13 см и 14 см, меньшая его диагональ 17 см, площадь основания 168 см^2 . Определите площадь боковой поверхности.

33. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом α и сторонами a и b . Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определите объем параллелепипеда.
34. Основание прямоугольного параллелепипеда вписано в круг радиуса R . Одна из сторон основания стягивает дугу окружности величиной 2α . Найдите объем этого параллелепипеда, если известно, что площадь его боковой поверхности S .
35. В прямоугольном параллелепипеде периметр основания равен 28 см, а периметр меньшей боковой грани 30 см, а площадь полной поверхности равна 348 см^2 . Определите объем параллелепипеда.
36. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, у которого площади двух боковых смежных граней равны 90 см^2 и 135 см^2 , а периметр основания равен 30 см.
37. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, сторона которого равна a , проведены два сечения: одно – через вершины D , A_1 и C_1 , другое – через вершины A , B_1 и D_1 . Найдите длину отрезка, по которому эти сечения пересекаются.
38. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 1. Найдите расстояние между плоскостями, одна из которых проходит через вершины A , B_1 , D_1 , а другая – через вершины B , C_1 , D куба.
39. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен полусумме квадратов трех диагоналей граней, выходящих из одной вершины.
40. Докажите, что диагональ прямоугольного параллелепипеда равна сумме проекций трех его измерений на диагональ параллелепипеда.
41. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ квадрат площади сечения $A_1 BD$ в 8 раз меньше суммы квадратов площадей граней.

42. Докажите, что сумма квадратов площадей боковых граней прямого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей его диагональных сечений.
43. Определите боковую поверхность и площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, диагонали которого равны 15 см и $\sqrt{313}$ см, а диагонали боковых граней 13 см и $2\sqrt{61}$ см.
44. Диагонали прямого параллелепипеда равны 16 см и 30 см, а угол, образованный ими, заключающий меньшую сторону основания, равен 60° . Боковое ребро параллелепипеда меньше большей стороны основания на 17 см. Определите площадь боковой поверхности.
45. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ из вершины тупого угла B_1 проведены перпендикуляры $B_1 E$ к стороне AD и $B_1 F$ к стороне CD . Определите полную поверхность параллелепипеда, если $BB_1 = 8 \text{ см}$, $B_1 E = \sqrt{89} \text{ см}$, $B_1 F = 10 \text{ см}$ и $EF = 5 \text{ см}$.
46. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 4 дм и 6 дм, а меньшая из диагоналей основания делит угол параллелограмма в отношении 1 : 2. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если меньшая диагональ его равна 13 дм.
47. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 60 см^2 . Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 72 см^2 и 60 см^2 . Найдите объем параллелепипеда.
48. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2 . Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
49. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m : n$, а диагональное сечение – квадрат с площадью Q . Определите объем параллелепипеда.

50. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания d , угол между диагоналями основания α , а угол, образуемый диагональной плоскостью, проведенной через большую сторону основания, с плоскостью основания, равен β . Определите объем параллелепипеда.
51. Определите площади диагональных сечений прямого параллелепипеда, стороны основания которого равны 63 см и 66 см, боковое ребро равно 100 см, отношение диагоналей параллелепипеда 25 : 29.
52. Определите площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, периметр основания которого равен 84 см, а точка пересечения диагоналей сечения удалена от сторон основания параллелепипеда на 15 см и $12\sqrt{2}$ см.
53. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной длиной 3 см, боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 имеют длину 5 см. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие расположены на прямых BB_1 и $C_1 D_1$ соответственно. Найдите длину медианы этого треугольника.
54. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 30$ см, $AD = 24$ см. В параллелепипеде проведен отрезок EF , где E – середина AD , а F – середина $A_1 B_1$, и на отрезке EF взята точка M так, что $EM : MF = 3 : 5$. Через вершину A и точку M проведена прямая, пересекающая плоскость основания $A_1 B_1 C_1 D_1$ в точке K . Определите расстояние $B_1 K$.
55. Основанием наклонного параллелепипеда является параллелограмм, стороны которого равны 7 см и 9 см, а одна из диагоналей равна 14 см. Вершина одного из тупых углов верхнего основания проецируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Определите объем параллелепипеда, если боковое ребро его равно 6 см.

56. Боковое ребро параллелепипеда наклонено к плоскости основания под углом 60° . Сечение параллелепипеда, проходящее через меньшие диагонали оснований, является прямоугольником, диагональ которого равна 29 см. Определите объем параллелепипеда, если стороны параллелограмма основания равны 15 см и 24 см, а угол между ними равен 60° .
57. Основание наклонного параллелепипеда – квадрат, сторона которого равна a . Боковое ребро равно b и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол α . Найдите объем параллелепипеда.
58. Основание наклонного параллелепипеда – прямоугольник с длинами сторон 5 см и 12 см. Боковое ребро равно диагонали основания и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.
59. Грани параллелепипеда – ромбы, которые равны между собой. Найдите объем параллелепипеда, если сторона ромба равна a и острый угол равен α .
60. Основания параллелепипеда – квадраты со стороной b , а все боковые грани – ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.
61. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Все четыре вершины одной грани куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Все четыре вершины противоположной грани куба лежат на апофемах боковых граней пирамиды. Все ребра пирамиды равны a . Чему равен объем куба?
62. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Все четыре вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Все ребра пирамиды равны a . Чему равен объем куба?
63. Одна из вершин куба и центры его граней, не содержащие эту вершину, служат вершинами пирамиды. Найдите ее объем, если сторона куба равна 3.

64. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Определите площадь боковой поверхности полученной пирамиды, если длина ребра равна a .
65. Из множества прямоугольных параллелепипедов, периметр основания которых равен 24 см, а периметр одной из боковых граней 36 см, найдите объем параллелепипеда, имеющего наименьшую диагональ.
66. Из множества прямоугольных параллелепипедов, периметры двух боковых граней которого равны 16 см и 24 см, найдите объем параллелепипеда, имеющего наибольшую боковую поверхность.
67. Из множества прямоугольных параллелепипедов, стороны оснований которых относятся как 3 : 5, а периметр меньшей боковой грани равен 36 см, найдите боковую поверхность параллелепипеда, имеющего наибольший объем.
68. Из множества прямоугольных параллелепипедов, стороны оснований которых относятся как 2 : 3, а периметр большей боковой грани равен 24 см, определите объем того параллелепипеда, который имеет наибольшую: а) площадь боковой поверхности; б) площадь полной поверхности.
69. В шар вписан прямоугольный параллелепипед с наибольшей боковой поверхностью, периметр основания которого равен 16 см. Определите объем параллелепипеда, если диаметр шара равен 9 см.
70. Из множества параллелепипедов, периметры боковых граней которых равны 12 см и 18 см, определите объем того параллелепипеда, около которого можно описать шар наименьшего радиуса.
71. В шар вписан прямоугольный параллелепипед. Диагонали двух боковых граней параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 16 см и 21 см, а угол между ними 60° . Определите площадь поверхности шара.

72. В полушар радиуса $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб, причем четыре вершины его лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.
73. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиуса $\frac{1}{2}$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося внешним образом данного шара, если известно, что ребро куба равно $\frac{3}{2}$.
74. Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите радиусы этих шаров.
75. Ребро куба равно a . Найдите поверхность шара, делящего каждое ребро куба на три равные части.
76. Куб и шар имеют общий центр. Найдите объем и полную поверхность той части шара, которая находится внутри куба, если ребро куба равно 8 см, а радиус шара равен 5 см.
77. В куб со стороной a вписан шар. Определите радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.
78. В куб с ребром a вписан шар. Через середины двух смежных ребер куба проведена плоскость, касающаяся шара. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.
79. Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – ромб со стороной a и острым углом α . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β . Определите площадь сечения ACB_1 .

80. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно a . Через диагональ AC его грани $ABCD$ проведена плоскость параллельно прямой BO_1 , где O_1 – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Определите площадь образовавшегося сечения.
81. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a точка K – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, точка L – центр грани $ADD_1 A_1$. Найдите периметр треугольника SKL .
82. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, с ребром a точка M – середина ребра BC , точка N – середина ребра $C_1 D_1$, точка P – середина ребра AA_1 . Найдите периметр треугольника MNP .
83. Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник ABC с углом при вершине B в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол ABC .
84. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 12$ см, $BC = 20$ см и $AA_1 = 16$ см. Определите площадь сечения параллелепипеда, которое проходит через вершину C перпендикулярно диагонали DC_1 .
85. Дан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием. В сечении параллелепипеда плоскостью получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30° .
86. Дан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием. В сечении параллелепипеда плоскостью получается ромб с острым углом 60° . Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?
87. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M – середина ребра $C_1 D_1$, точка N выбрана на ребре AB так, что $AN = 2NB$. Через вершину D и точки M и N проведена плоскость α . Определите величину

- ну двугранного угла между плоскостью α и плоскостью грани ABC куба.
88. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости грани $ABCD$.
89. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка P лежит на ребре CC_1 , причем $C_1 P = 2CP$. Найдите угол между плоскостями $BD_1 P$ и ABC .
90. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями BCB_1 и $BC_1 M$, где M – середина ребра AD .
91. Ребро куба равно a . Найдите расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани.
92. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через диагональ куба с концом в вершине B и середину ребра AD проведена плоскость; расстояние от точки D до проведенной плоскости равно h . Найдите длину ребра куба.
93. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 4$ см, $AD = 6$ см, $AA_1 = 8$ см. Точка K – середина ребра AA_1 , точка L лежит на ребре DD_1 , причем $DL = 2$ см, а точка M принадлежит отрезку $B_1 C$ и $MC = 2B_1 M$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M .
94. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AA_1 = 8$ см, $AB = 10$ см, $AD = 12$ см. Точка K – центр грани $AA_1 B_1 B$, точка L принадлежит ребру BB_1 и $BL = 3$ см, точка M делит ребро DC_1 в отношении $1 : 3$, считая от D . Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M .

95. На ребрах AD и C_1D_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер – и через точки C , P и Q проведена плоскость. Найдите угол между плоскостями CPQ и ABC .
96. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M лежит на ребре AA_1 , причем $AM : MA_1 = 3 : 1$, а точка K лежит на ребре CC_1 и $CK = MA_1$. Найдите угол между плоскостями DMB и DKB .
97. Высота прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в два раза меньше стороны ромба, лежащего в его основании, а угол BAD этого ромба равен 30° . Сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через сторону AD , образует с основанием угол, равный 60° . Найдите объем параллелепипеда и площадь полученного сечения, если высота параллелепипеда равна a .
98. На ребре CD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка P – середина этого ребра. Сечение куба плоскостью проходит через вершину B_1 перпендикулярно прямой $A_1 P$. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a .
99. В прямом параллелепипеде стороны оснований равны a и $2a$, угол между ними – 60° . Найдите его диагонали, если меньшая из них составляет с основанием угол в 45° .
100. В прямом параллелепипеде стороны равны 17 см и 18 см, одна из диагоналей основания равна 25 см. Большая диагональ параллелепипеда составляет с основанием угол в 45° . Найдите площадь его диагональных сечений.

2.3. Ответы и указания

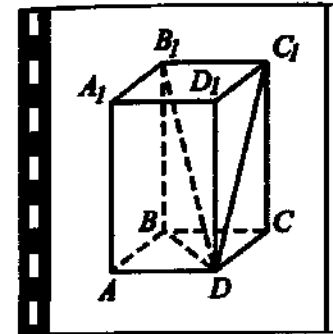
1. 2268 см^3 .

Рис. 45

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник, $S_{\text{нов}} = 1098 \text{ см}^2$,
 $AB : AD : AA_1 = 3 : 4 : 7$ (рис. 45);
- 2) $AB = 3x$, $AD = 4x$, $AA_1 = 7x$,
 $S_{\text{нов}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2AB \cdot AD +$
 $+ 2(AB + AD)AA_1$, $1098 = 24x^2 + 98x^2$
 $\Rightarrow x = 3 \text{ см}$, $AB = 9 \text{ см}$, $AD = 12 \text{ см}$,
 $AA_1 = 21 \text{ см}$;
- 3) $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2268 \text{ см}^3$.

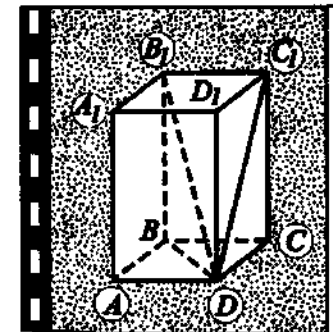
2. 1152 см^2 .3. 1140 см^3 .

Рис. 46

1) Указание:

- 2) $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $B_1 D = 19 \text{ см}$, $DC_1 = 16 \text{ см}$, $AD = 15 \text{ см}$,
 $CC_1 = x$ (рис. 46);
- 3) $\triangle B_1 BD$,
 $BD^2 = B_1 D^2 - B_1 B^2 = 361 - x^2$;
- 4) $\triangle ABD$,
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$;
- 5) $361 - x^2 = 256 - x^2 + 225 -$
 $- 2\sqrt{256 - x^2} \cdot 15 \cos 60^\circ \Rightarrow x = 8\sqrt{3} \text{ см}$;
- 6) $\triangle C_1 CD$, $CD = \sqrt{C_1 D^2 - C_1 C^2} = 8 \text{ см}$;
- 7) $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = (AB \cdot AD \sin 60^\circ) \cdot CC_1 = 1440 \text{ см}^3$.

4. 18 см.

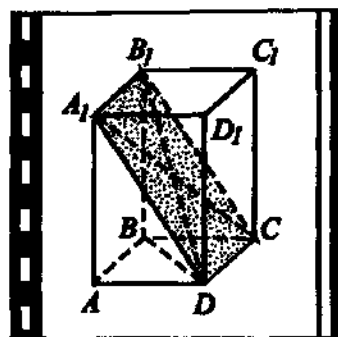
5. 144 см^3 .

Рис. 47

Указание:

1) $ABCD$ – параллелограмм, $AC = 14 \text{ см}$,

$$B_1D = 4\sqrt{10} \text{ см}, A_1D = 13 \text{ см},$$

$$C_1D = 3\sqrt{17} \text{ см}, CC_1 = x \text{ (рис. 47);}$$

2) $DA_1B_1C_1$, $B_1D^2 + A_1C^2 = 2(A_1D^2 + DC^2)$,

$$196 + 160 = 2(322 - x^2) \Rightarrow x = 12 \text{ см};$$

3) ΔC_1CD , $CD = \sqrt{C_1D^2 - CC_1^2} = 3 \text{ см};$

$$4) \Delta A_1AD, AD = \sqrt{A_1D^2 - A_1A^2} = 5 \text{ см}, \Delta B_1BD, BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 4 \text{ см}.$$

$$5) \Delta ABD, BD = 4 \text{ см}, S_{осн} = 2S_{ABD} = AB \cdot BD = 12 \text{ см}^2;$$

$$6) V = S_{осн} \cdot BB_1 = 144 \text{ см}^3.$$

6. $432 \text{ см}^3, 384 \text{ см}^2$.

7. 17 см, 10 см.

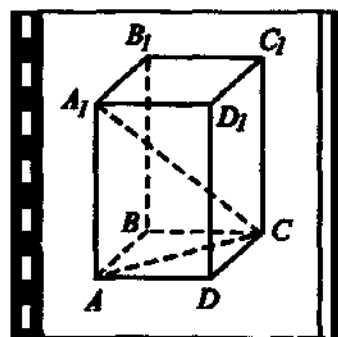


Рис. 48

Указание:

1) $ABCD$ – параллелограмм, $V = 3360 \text{ см}^3$,

$$S_{нов} = 1416 \text{ см}^2, S_{бок} = 1080 \text{ см}^2,$$

$$A_1C = 29 \text{ см}, AA_1 = H \text{ (рис. 48);}$$

$$2) S_{нов} = 2S_{осн} + S_{бок} \Rightarrow$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2}(S_{нов} - S_{бок}) = 168 \text{ см}^2;$$

$$3) V = S_{осн} \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{S_{осн}} = 20 \text{ см};$$

$$4) S_{бок} = P_{осн} \cdot H \Rightarrow P_{осн} = \frac{S_{бок}}{H} = 54 \text{ см}, DA = x, DC = 27 - x;$$

$$5) \Delta A_1AC, AC = \sqrt{A_1C^2 - A_1A^2} = 21 \text{ см};$$

$$6) \Delta ADC, P_{ADC} = AC + AD + DC = 48 \text{ см}, p = \frac{1}{2}P = 24 \text{ см}, S_{ADC} = \\ = \sqrt{p(p-AC)(p-AD)(p-DC)} = 6\sqrt{2(-x^2 + 27x - 72)}, S_{ABCD} = \\ = 2S_{ADC}, 168 = 12\sqrt{2(-x^2 + 27x - 72)}, x = 17 \text{ см}, DC = 10 \text{ см}.$$

8. 11 см.

$$9. 2b^2 \sin 2\beta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

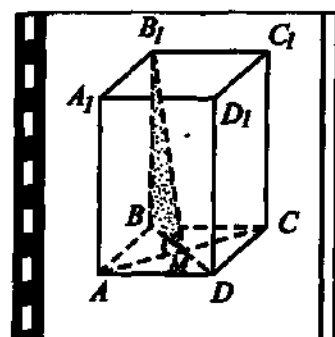


Рис. 49

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $\angle AMB = \alpha$, $B_1M = b$, $\angle BMB_1 = \beta$ (рис. 49);2) ΔB_1BM_1 , $B_1B = B_1M \sin \beta = b \sin \beta$,

$$BM = B_1M \cos \beta = b \cos \beta,$$

$$BD = 2BM = 2b \cos \beta;$$

3) ΔBAD , $\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$,

$$AB = BD \sin \frac{\alpha}{2} = 2b \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}, AD = BD \cos \frac{\alpha}{2} = 2b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta;$$

$$4) S_{бок} = P_{осн} \cdot H = 2(AD + AB) \cdot BB_1 = 2b^2 \sin 2\beta \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$10. \frac{1}{2} l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \beta.$$

$$11. 2a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

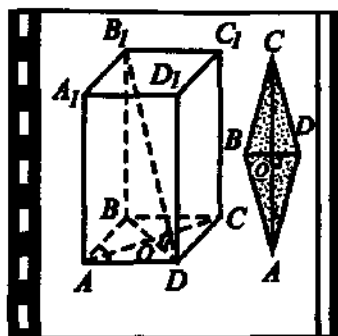


Рис. 50

Указание:

1) $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = \alpha$, $AB = a$, $\angle BDB_1 = \beta$ (рис. 50);2) $\triangle DOA_1$, $OD = AD \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\alpha}{2}$,

$$BD = 2OD = 2a \sin \frac{\alpha}{2};$$

3) $\triangle B_1BD$; $BB_1 = BD \operatorname{tg} \beta = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$;

$$4) S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha, V = S_{ABCD} BB_1 = 2a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$12. \frac{1}{2} m^3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$13. \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

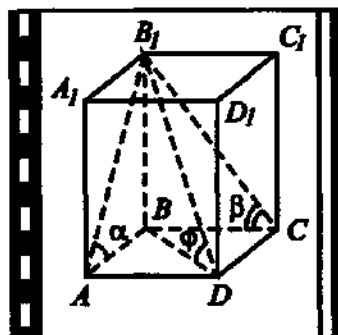


Рис. 51

Указание:

1) $\angle B_1CB = \beta$, $\angle B_1AB = \alpha$, $\angle B_1DB = \varphi$, $BB_1 = x$ (рис. 51);2) $\triangle B_1BC$, $BC = BB_1 \operatorname{ctg} \beta = x \operatorname{ctg} \beta$;3) $\triangle B_1BA$, $BA = BB_1 \operatorname{ctg} \alpha = x \operatorname{ctg} \alpha$;4) $\triangle BAD$,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

5) $\triangle B_1BD$, $\operatorname{ctg} \varphi = BD : BB_1 =$

$$= \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}, \text{ следовательно, } \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

$$14. 480 \text{ см}^3.$$

$$15. \frac{S \sqrt{S} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin \beta} \cdot \sqrt[4]{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}.$$

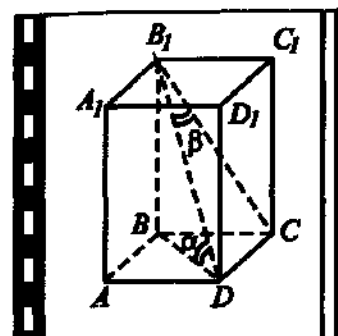


Рис. 52

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $\angle B_1DB = \alpha$, $\angle DB_1C = \beta$, $S_{ABCD} = S$, $AD = x$,

$$DC = \frac{S}{x} \text{ (рис. 52);}$$

2) $\triangle DCB_1$, $B_1D = \frac{DC}{\sin \beta} = \frac{S}{x \sin \beta}$;3) $\triangle DAB$,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x};$$

4) $\triangle B_1BD$, $B_1D = \frac{BD}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x \cos \alpha}$, $\frac{S}{x \sin \beta} = \frac{\sqrt{x^4 + S^2}}{x \cos \alpha}$, значит,

$$x = \sqrt{\frac{S}{\sin \beta}} \cdot \sqrt[4]{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta};$$

5) $\triangle B_1BD$, $BB_1 = B_1D \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{S} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin \beta} \cdot \sqrt[4]{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}};$

$$6) V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = \frac{S \sqrt{S} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin \beta} \cdot \sqrt[4]{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}.$$

$$16. \frac{a^3 \cos^2 \alpha \sin \beta \sin \alpha}{2 \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}.$$

$$17. 248 \text{ см}^2.$$

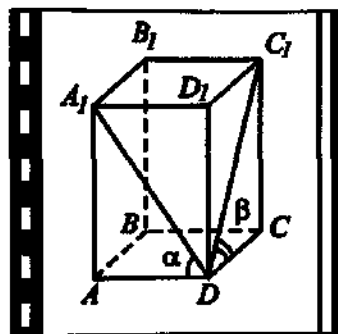


Рис. 53

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник,
 $A_1D = 20\sqrt{2}$, $C_1D = 5$ см, $\angle A_1DA = \alpha$,
 $\angle C_1DC = \beta$, $\beta - \alpha = 45^\circ$ (рис. 53);
- 2) $\triangle A_1AD$, $AA_1 = A_1D \sin \alpha = 20\sqrt{2} \sin \alpha$;
- 3) $\triangle C_1CD$, $CC_1 = C_1D \sin \beta = 5 \sin(\alpha + 45^\circ)$;
- 4) $20\sqrt{2} \sin \alpha = 5 \sin(\alpha + 45^\circ) \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}, \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{50}};$$

$$5) \triangle A_1AD, AD = A_1D \cos \alpha = 28 \text{ см}, AA_1 = 4 \text{ см};$$

$$6) \triangle C_1CD, CD = \sqrt{C_1D^2 - C_1C^2} = 3 \text{ см};$$

$$7) S_{\text{бок}} = 2(AD + DC) \cdot CC_1 = 248 \text{ см}^2.$$

$$18. 27 \text{ см}^3.$$

$$19. 4m^3 \sin^2 2\alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

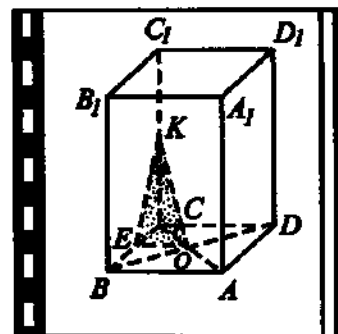


Рис. 54

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник, O – его центр, K – середина CC_1 , $OK = m$,
 $BE = EC$, $\angle KOC = \alpha$, $\angle OKE = 2\alpha$;
- 2) $\triangle OKE$, $OE = OK \sin 2\alpha = m \sin 2\alpha$,
 $EK = OK \cos 2\alpha = m \cos 2\alpha$,
 $DC = 2OE = 2m \sin 2\alpha$ (рис. 54);
- 3) $\triangle OCK$, $CK = OK \sin \alpha = m \sin \alpha$,
 $CC_1 = 2CK = 2m \sin \alpha$,
 $CO = OK \cos \alpha = m \cos \alpha$;

$$4) \triangle KCE, CE = \sqrt{EK^2 - CK^2} = m \cos \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha},$$

$$CB = 2CE = 2m \cos \alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha};$$

$$5) V = CB \cdot CD \cdot CC_1 = 4m^3 \sin^2 2\alpha \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}.$$

$$20. 2h^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$21. \frac{h^3 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \beta}}{\sin 2\beta}.$$

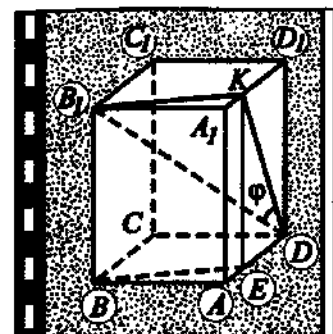


Рис. 55

Указание:

- 1) $ABCD$ – ромб, $\angle BAD = 2\beta$, $BE \perp AD$,
 $BE = h$, $B_1K \parallel BE$, $\angle B_1DK = \varphi$ (рис. 55);

$$2) \triangle AEB, AB = \frac{BE}{\sin 2\beta} = \frac{h}{\sin 2\beta},$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BE = \frac{h^2}{\sin 2\beta},$$

$$AE = BE \operatorname{ctg} 2\beta = h \operatorname{ctg} 2\beta;$$

- 3) $\triangle B_1KD$, $DK = B_1K \operatorname{ctg} \varphi = h \operatorname{ctg} \varphi$,
 $ED = AD - AE = h \operatorname{tg} \beta$;

$$4) \triangle KED, EK = \sqrt{DK^2 - ED^2} = h \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \beta};$$

$$5) V = S_{ABCD} \cdot EK = \frac{h^3 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \beta}}{\sin 2\beta}.$$

$$22. \frac{d^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

$$23. d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

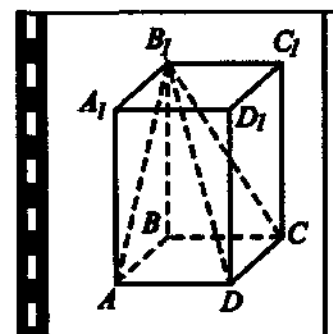


Рис. 56

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник, $B_1D = d$,
 $\angle AB_1D = \angle CB_1D = \alpha$ (рис. 56);

$$2) \triangle B_1AD, AD = B_1D \sin \alpha = d \sin \alpha,$$

$$DC = AD, AB_1 = B_1D \cos \alpha = d \cos \alpha;$$

- 3) $\triangle B_1BA$,

$$BB_1 = \sqrt{B_1A^2 - AB^2} = d \sqrt{\cos 2\alpha};$$

$$4) V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = AD^2 \cdot BB_1 = d^3 \sin^2 \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

24. 30 см^3 .

25. $a^3 \operatorname{tg} \beta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}$.

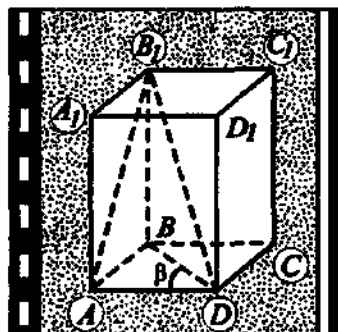


Рис. 57

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $AD = a$, $\angle B_1DA = \alpha$, $\angle BDA = \beta$ (рис. 57);2) $\triangle BAD$, $AB = AD \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \beta$ 3) $\triangle B_1AD$, $AB_1 = AD \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$;4) $\triangle B_1BA$,

$$BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = a \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta};$$

5) $V = AB \cdot AD \cdot BB_1 =$

$$= a^3 \operatorname{tg} \beta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

26. 288 см^2 .

27. $\arccos(\sin \alpha \sin \beta)$.

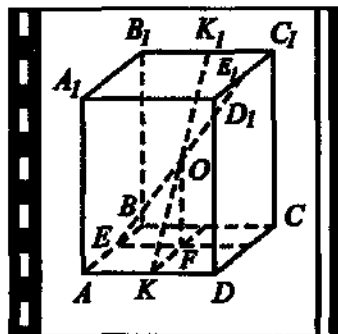


Рис. 58

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, F – его центр, $AE = EB$, $AK = KD$, O – центр параллелепипеда, $\angle OEF = \alpha$, $EE_1 \parallel AD_1$, $KK_1 \parallel DC_1$, $\angle OKF = \beta$, $\angle EOK = \varphi$, $DC = x$, $AD = y$ (рис. 58);2) $\triangle OFK$, $OF = FK \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \beta$,

$$OK = \frac{KF}{\cos \beta} = \frac{x}{2 \cos \beta};$$

3) $\triangle OFE$, $OF = EF \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{2} \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{x}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{2} \operatorname{tg} \alpha$, значит,

$$x = \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}, \quad OK = \frac{y \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \beta}, \quad OE = \frac{EF}{\cos \alpha} = \frac{y}{2 \cos \alpha};$$

4) $\triangle EFK$, $EK = \frac{1}{2} BD = \frac{y \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}{2 \operatorname{tg} \beta}$;

5) $EK^2 = OE^2 + OK^2 - 2OE \cdot OK \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta$,
 $\varphi = \arccos(\sin \alpha \sin \beta)$.

28. 6912 см^3 .

29. $\frac{1}{4} Sd \cos \frac{\alpha}{2}$.

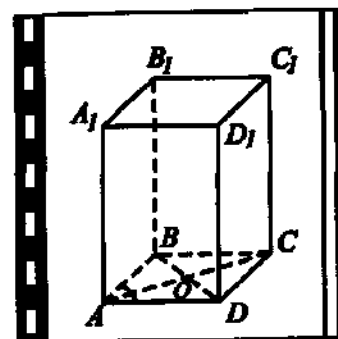


Рис. 59

Указание:

1) $ABCD$ – ромб, $BD = d$, $\angle BAD = \alpha$, $S_{\text{бок}} = S$ (рис. 59);2) $\triangle AOD$, $OD = \frac{d}{2}$, $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$,

$$AD = \frac{OD}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

3) $S_{\text{бок}} = 4AD \cdot AA_1$, $S = \frac{4d \cdot AA_1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$

$$AA_1 = \frac{S \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2d};$$

4) $V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = AD^2 \sin \alpha \cdot AA_1 = \frac{1}{4} Sd \cos \frac{\alpha}{2}$.

30. $d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$.

31. $\frac{abS}{4(a+b)}$.

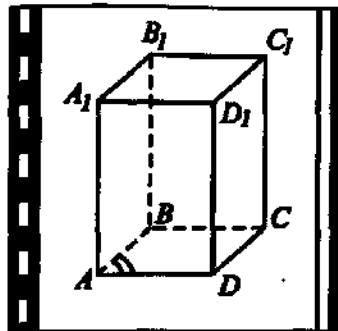


Рис. 60

Указание:

1) $ABCD$ – параллелограмм, $AB = b$, $AD = a$, $\angle BAD = 30^\circ$, $S_{бок} = S$ (рис. 60);

$$2) S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ab;$$

$$3) S_{бок} = P_{ABCD} \cdot AA_1, S = 2AA_1(a + b),$$

значит, $AA_1 = \frac{S}{2(a + b)};$

$$4) V = S_{ABCD} \cdot AA_1 = \frac{abS}{4(a + b)}.$$

32. 432 см^2 .

33. $2ab \sin \alpha \sqrt{-ab \cos \alpha}$.

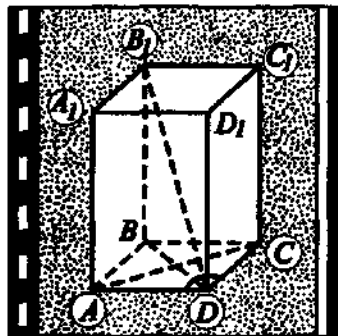


Рис. 61

Указание:

1) $ABCD$ – параллелограмм, $\angle ADC = \alpha$, $AD = b$, $AB = a$, $AC = B_1D$ (рис. 61);

2) $\triangle ADC$,

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha};$$

3) $\triangle ABD$,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha};$$

$$4) \triangle B_1BD, B_1B = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = 2\sqrt{-ab \cos \alpha};$$

$$5) S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin \alpha = ab \sin \alpha,$$

$$V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = 2ab \sin \alpha \sqrt{-ab \cos \alpha}.$$

34. $\frac{R \cdot S \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

35. 432 см^3 .

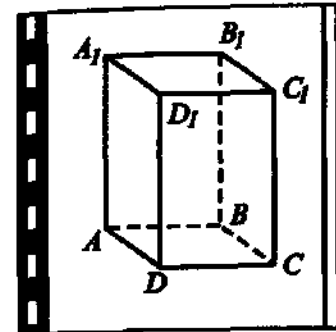


Рис. 62

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $P_{ABCD} = 28 \text{ см}$, $P_{DD_1C_1C} = 30 \text{ см}$, $S_{полн} = 348 \text{ см}^2$ (рис. 62);

$$2) AD = x, DC = \frac{P_{ABCD}}{2} - AD = 14 - x,$$

$$CC_1 = \frac{P_{DD_1C_1C}}{2} - DC = x + 1;$$

$$3) S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок},$$

$$348 = 2x(14 - x) + 28(x + 1),$$

($x = 20$ не удовлетворяет условию) $x = 8 \text{ см}$, $DC = 6 \text{ см}$, $CC_1 = 9 \text{ см}$;

$$4) V = AD \cdot DC \cdot AA_1 = 432 \text{ см}^3.$$

36. 810 см^3 .

37. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

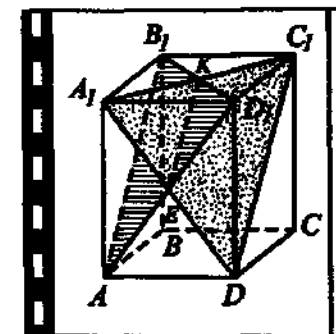


Рис. 63

Указание:

1) K – центр грани $A_1B_1C_1$, E – центр грани AA_1D_1D , $AB = a$ (рис. 63);

$$2) \triangle DCC_1, DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{2};$$

3) $\triangle DA_1C_1$ – правильный, $A_1K = KC_1$,

$$A_1E = ED \Rightarrow KE = \frac{1}{2} C_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

38. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

39.

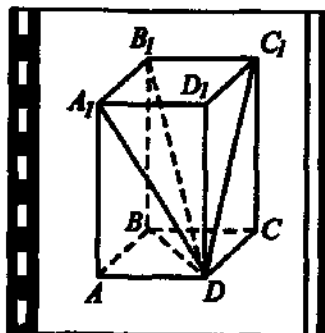


Рис. 64

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник, $BD = d_1$,
 $AD = d_2$, $C_1D = d_3$ (рис. 64);
- 2) $\triangle B_1A_1D$, $B_1D^2 = d_2^2 + A_1B_1^2$;
- 3) $\triangle B_1C_1D$, $B_1D^2 = d_3^2 + B_1C_1^2$;
- 4) $2B_1D^2 = d_2^2 + d_3^2 + (A_1B_1^2 + B_1C_1^2) =$
 $= d_2^2 + d_3^2 + d_1^2$, $B_1D^2 = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$.

41.

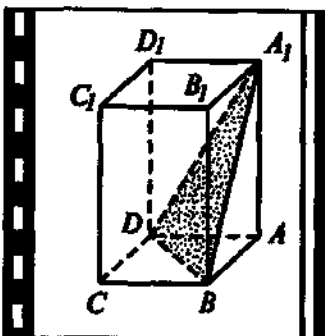


Рис. 65

Указание:

- 1) $ABCD$ – прямоугольник, $AB = b$,
 $CB = a$, $BB_1 = c$ (рис. 65);
- 2) $S = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$;
- 3) $\triangle DD_1A_1$,
 $DA_1 = \sqrt{DD_1^2 + D_1A_1^2} = \sqrt{a^2 + c^2}$;
- 4) $\triangle A_1AB$,
 $BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$;

$$5) \triangle DCB, DB = \sqrt{DC^2 + CB^2} = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$6) p = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$S_{ABD}^2 = p(p - \sqrt{a^2 + c^2})(p - \sqrt{b^2 + c^2})(p - \sqrt{a^2 + b^2}) =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2);$$

$$7) S : S_{ABD}^2 = 8 : 1.$$

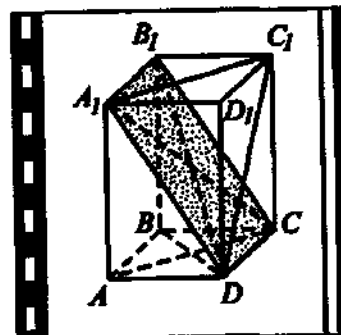
43. 360 см^2 , 108 см^2 , 156 см^2 .

Рис. 66

Указание:

- 1) $ABCD$ – параллелограмм, $B_1D = 15 \text{ см}$,
 $A_1C = \sqrt{313} \text{ см}$, $A_1D = 2\sqrt{61} \text{ см}$,
 $C_1D = 13 \text{ см}$ (рис. 66);
- 2) DA_1B_1C ,
 $B_1D^2 + A_1C^2 = 2(A_1D^2 + DC^2)$,
 $313 + 225 = 488 + 2 \cdot DC^2 \Rightarrow DC = 5 \text{ см}$;
- 3) $\triangle C_1CD$, $CC_1 = \sqrt{C_1D^2 - DC^2} = 12 \text{ см}$;

$$4) \triangle A_1AD, AD = \sqrt{A_1D^2 - AA_1^2} = 10 \text{ см};$$

$$5) S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 360 \text{ см}^2;$$

$$6) \triangle A_1AC, AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} = 13 \text{ см},$$

$$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 156 \text{ см}^2;$$

$$7) \triangle B_1BD, BD = \sqrt{B_1D^2 - BB_1^2} = 9 \text{ см},$$

$$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = 108 \text{ см}^2.$$

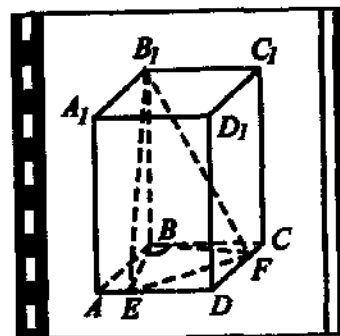
44. 198 см^2 .45. 295 см^2 .

Рис. 67

Указание:

- 1) $ABCD$ – параллелограмм, $B_1E \perp AD$,
 $B_1F \perp DC$, $BB_1 = 8 \text{ см}$, $B_1E = \sqrt{89} \text{ см}$,
 $B_1F = 10 \text{ см}$, $EF = 5 \text{ см}$, $\angle EBF = \alpha$;
- 2) $\triangle B_1BE$, $BE = \sqrt{B_1E^2 - B_1B^2} = 5 \text{ см}$;
- 3) $\triangle B_1BF$, $BF = \sqrt{B_1F^2 - B_1B^2} = 6 \text{ см}$;
- 4) $\triangle BEF$, (рис. 67)

$$\cos \alpha = \frac{BE^2 + BF^2 - FE^2}{2BF \cdot BE} = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5};$$

$$5) \triangle BEA, \angle BAE = \alpha, AB = \frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{25}{4} \text{ см};$$

$$6) \triangle BFC, \angle BCF = \alpha, BC = \frac{BF}{\sin \alpha} = \frac{30}{4} \text{ см};$$

$$7) S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2AB \cdot AD \sin \alpha + 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 295 \text{ см}^2.$$

$$46. 240 \text{ см}^2.$$

$$47. 360 \text{ см}^3.$$

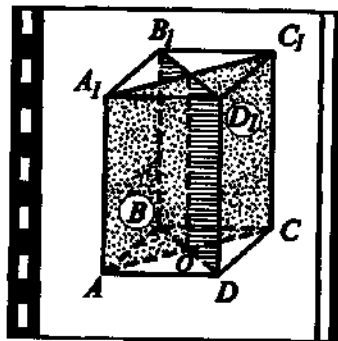


Рис. 68

Указание:

$$1) ABCD - \text{ромб}, BD \perp AC, BD = x, \\ AC = y, AA_1 = h, S_{ABCD} = \\ = S_{BB_1D_1D} = 60, S_{ACC_1A_1} = 72 \text{ (рис. 68)};$$

$$2) S_{ACC_1A_1} = AC \cdot AA_1, yh = 72 \Rightarrow y = \frac{72}{h};$$

$$3) S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1, xh = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{h};$$

$$4) S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AC}{2}, 60 = \frac{xy}{2},$$

$$60 = \frac{4320}{2h^2}, h = 6;$$

$$5) V = S_{ABCD}h = 360 \text{ см}^3.$$

$$48. 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}.$$

$$49. \frac{Q\sqrt{Q} \cdot mn}{m^2 + n^2}.$$

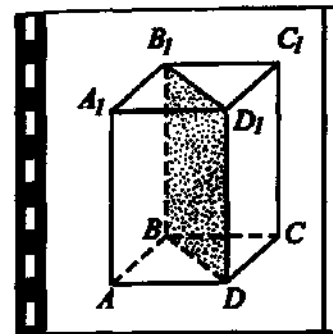


Рис. 69

Указание:

$$1) ABCD - \text{прямоугольник}, \\ AD : DC = m : n, BB_1 = B_1D_1, \\ S_{B_1BDD_1} = Q, AD = mx, DC = nx \text{ (рис. 69)};$$

$$2) \triangle BAD, \\ BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = x\sqrt{m^2 + n^2};$$

$$3) S_{BB_1D_1D} = BD^2, Q = x^2(m^2 + n^2) \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2 + n^2}}, AD = \frac{m\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$DC = \frac{n\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2 + n^2}}, BD = B_1B = \sqrt{Q};$$

$$4) V = S_{ABCD} \cdot BB_1 = AB \cdot AD \cdot BB_1 = \frac{Q\sqrt{Q} \cdot mn}{m^2 + n^2}.$$

$$50. \frac{1}{2} d^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

$$51. 75 \text{ дм}^2, 105 \text{ дм}^2.$$

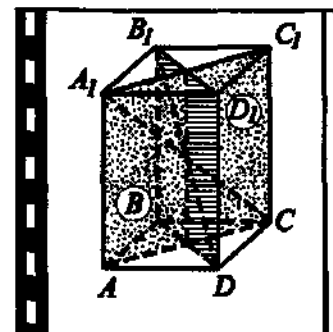


Рис. 70

Указание:

$$1) ABCD - \text{параллелограмм}, AD = 66 \text{ см}, \\ DC = 63 \text{ см}, AA_1 = 100 \text{ см}, \\ B_1D : A_1C = 25 : 29, B_1D = 25x, \\ A_1C = 29x \text{ (рис. 70)};$$

$$2) \triangle B_1BD, \\ BD^2 = B_1D^2 - BB_1^2 = 625x^2 - 10000;$$

$$3) \triangle AA_1C, \\ AC^2 = CA_1^2 - AA_1^2 = 841x^2 - 10000;$$

$$4) BD^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2), 1466x^2 - 20000 = 2(4356 + 3969) \Rightarrow \\ x = 5 \text{ см}, B_1D = 125 \text{ см}, BD = 75 \text{ см}, AC = 105 \text{ см};$$

$$5) S_{BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD = 7500 \text{ см}^2, S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC = 105 \text{ дм}^2.$$

$$52. 720 \text{ см}^2.$$

$$53. \frac{3\sqrt{30}}{2} \text{ см}.$$

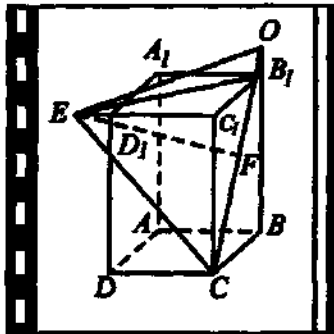


Рис. 71

Указание:

- 1) $ABCD$ – квадрат, $AB = 3 \text{ см}$, $AA_1 = 5 \text{ см}$,
 $O \in BB_1$, $E \in D_1C_1$, $B_1O = y$,
 $ED_1 = x$, $CE = EO = OC$, $OF = FC$;

- 2) $\triangle CC_1E$,

$$CE = \sqrt{CC_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{25 + (3+x)^2};$$

- 3) $\triangle B_1C_1E$,

$$B_1E = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{9 + (3+x)^2};$$

$$4) \triangle OBE, OE = \sqrt{OB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3+x)^2};$$

$$5) OE = CE, \sqrt{25 + (3+x)^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3+x)^2} \Rightarrow y = 4 \text{ см};$$

$$6) \triangle OBC, OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = 3\sqrt{10} \text{ см};$$

$$7) \triangle EFO, EF = OE \sin \angle FOE = \frac{3\sqrt{30}}{2} \text{ см (рис. 71)}.$$

$$54. 25 \text{ см}.$$

$$55. 240 \text{ см}^3.$$

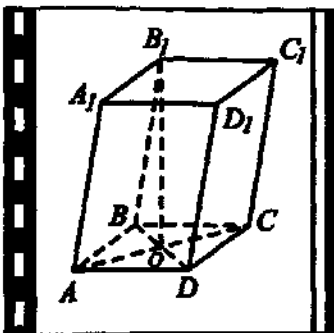


Рис. 72

Указание:

- 1) $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 9 \text{ см}$,
 $DC = 7 \text{ см}$, $AC = 14 \text{ см}$, O – центр ос-
 нования, $AA_1 = 6 \text{ см}$ (рис. 72);

- 2) $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$,

$$BD^2 + 196 = 2(49 + 81) \Rightarrow BD = 8 \text{ см};$$

- 3) $\triangle B_1OB$, $OB = \frac{1}{2} BD = 4 \text{ см},$

$$B_1O = \sqrt{B_1B^2 - OB^2} = 2\sqrt{5} \text{ см};$$

$$4) S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2\sqrt{p(p-AB)(p-BD)(p-AD)} = 24\sqrt{5} \text{ см}^2;$$

$$5) V = S_{ABCD} \cdot B_1O = 240 \text{ см}^3.$$

$$56. 5400 \text{ см}^3.$$

$$57. a^2 b \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

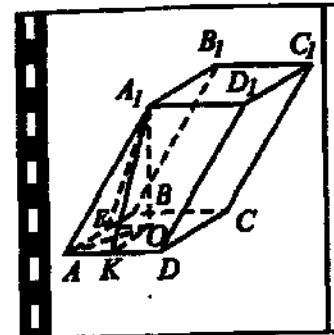


Рис. 73

Указание:

- 1) $ABCD$ – квадрат,
 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \alpha$, $AB = AD = a$,
 $AA_1 = b$, $OA_1 \perp ABCD$, $A_1K \perp AD$,
 $A_1E \perp AB$, $\triangle A_1AK = \triangle A_1AE$,
 $\angle OAE = \angle OAK = 45^\circ$ (рис. 73);

- 2) $\triangle A_1AK$, $A_1K = b \sin \alpha$,

$$AK = b \cos \alpha;$$

- 3) $\triangle A_1KO$,

$$A_1O = \sqrt{A_1K^2 - OK^2} = b \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha};$$

$$4) V = S_{ABCD} \cdot A_1O = a^2 b \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

$$58. 390 \text{ см}^3.$$

$$59. 2a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

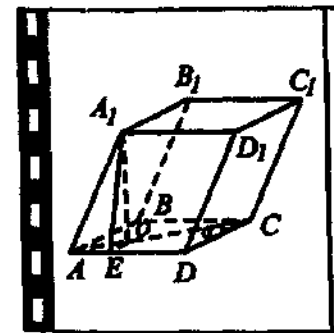


Рис. 74

Указание:

- 1) $ABCD$ – ромб, $AD = DC = DD_1 = a$,
 $\angle BAD = \alpha$, $A_1O \perp ABC$ (рис. 74);

- 2) $\triangle A_1EA$, $A_1E = AA_1 \cdot \sin \alpha = a \sin \alpha$,
 $AE = AA_1 \cos \alpha = a \cos \alpha$;

- 3) $\triangle AEO$,

$$EO = AE \tan \frac{\alpha}{2} = a \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \Delta A_1OE, A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = a\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) V = S_{ABCD} \cdot A_1O = AB^2 \cdot A_1O \sin \alpha = 2a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$60. \frac{b^3 \sqrt{2}}{2}.$$

$$61. \frac{a^3 \sqrt{2}}{32}.$$

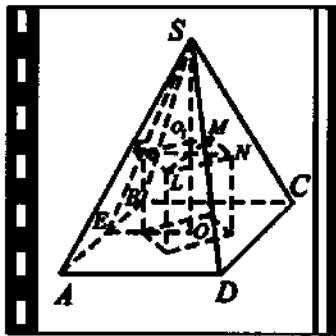


Рис. 75

Указание:

1) $KL = x$, O – центр грани $ABCD$, O_1 – центр грани $KMNL$, $AE = EB$ (рис. 75);

$$2) KO_1 = \frac{1}{2} KN = \frac{1}{2} \sqrt{KL^2 + LN^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2},$$

$$EO = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2};$$

$$3) \Delta SOA, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$SO_1 = SO - OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - x;$$

$$4) \Delta SO_1K \sim \Delta SOE; KO_1 : EO = SO_1 : SO,$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{2} : \frac{a}{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x \right) : \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

$$5) V = x^3 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{32}.$$

$$62. \frac{a^3}{(1 + \sqrt{2})^3}.$$

$$63. \frac{9}{4}.$$

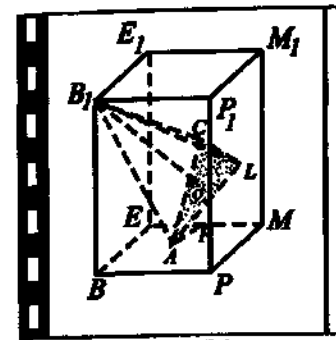


Рис. 76

Указание:

1) A, L, C – центры граней $PBEM$, PP_1M_1M , MM_1E_1E , $B_1O \perp ALC$, $MF = FE$ (рис. 76);

$$2) \Delta AFC, AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \Delta ALC, AL = AC = LC,$$

$$S_{ALC} = \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{8},$$

$$OC = \frac{2}{3} AC \sin 60^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$4) \Delta B_1BA, B_1A = \sqrt{BB_1^2 + BA^2} = \frac{\sqrt{54}}{2};$$

$$5) \Delta B_1OA, OB_1 = \sqrt{B_1A^2 - AO^2} = \sqrt{12};$$

$$6) V = \frac{1}{3} S_{ALC} \cdot OB_1 = \frac{9}{4}.$$

$$64. \frac{3a^2}{2}.$$

$$65. 160 \text{ см}^3.$$

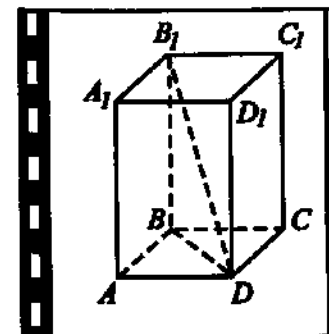


Рис. 77

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $P_{ABCD} = 24 \text{ см}$, $P_{DD_1C_1C} = 36 \text{ см}$, $DC = x$, $AD = 12 - x$, $CC_1 = 18 - x$ (рис. 77);

2) ΔABD ,

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + (12 - x)^2};$$

$$3) \Delta B_1BD, B_1D = d = \sqrt{B_1B^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + (12 - x)^2 + (18 - x)^2} = \sqrt{3x^2 - 60x + 468},$$

$$d' = \frac{3(x-10)}{\sqrt{3x^2 - 60x + 468}}, d' = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ см}, DC = 10 \text{ см}, AD = 2 \text{ см},$$

$$CC_1 = 8 \text{ см};$$

$$4) V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 160 \text{ см}^3.$$

$$66. 105 \text{ см}^3.$$

$$67. 384 \text{ см}^2.$$

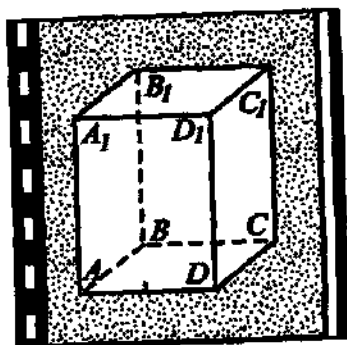


Рис. 78

Указание:

$$1) ABCD - \text{прямоугольник}, DC : AD = 3 : 5, DC = 3x, AD = 5x, \\ P_{DD_1C_1C} = 36 \text{ см (рис. 78);}$$

$$2) CC_1 = \frac{P_{DD_1C_1C}}{2} - DC = 18 - 3x;$$

$$3) V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 270x^2 - 45x^3, \\ V' = 540x - 135x^2, V' = 0, \Rightarrow x = 4 \text{ см}, \\ AD = 20 \text{ см}, DC = 12 \text{ см}, CC_1 = 6 \text{ см};$$

$$4) S_{бок} = P_{ABCD} \cdot AA_1 = 384 \text{ см}^2.$$

$$68. 144 \text{ см}^3, \frac{400}{3} \text{ см}^3.$$

$$69. 112 \text{ см}^3.$$

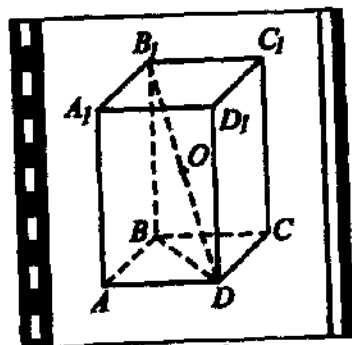


Рис. 79

Указание:

$$1) ABCD - \text{прямоугольник}, P_{ABCD} = 16 \text{ см}, \\ B_1D = 9 \text{ см}, O - \text{центр параллелепипеда}, AB = x, AD = 8 - x \text{ (рис. 79);}$$

$$2) \triangle BAD, \\ BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2x^2 - 16x + 64};$$

$$3) \triangle B_1BD, \\ BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{17 + 16x - 2x^2};$$

$$4) S_{бок} = P_{ABCD} \cdot BB_1 = 16\sqrt{17 + 16x - 2x^2}, S'_{бок} = \frac{8(16 - 4x)}{\sqrt{17 + 16x - 2x^2}},$$

$$S'_{бок} = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ см}, AB = AD = 4 \text{ см}, BB_1 = 7 \text{ см};$$

$$5) V = AB^2 \cdot BB_1 = 112 \text{ см}^3.$$

$$70. 20 \text{ см}^3.$$

$$71. 529 \pi \text{ см}^3.$$

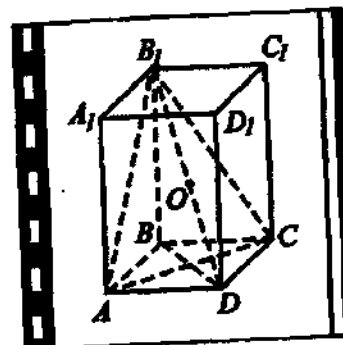


Рис. 80

Указание:

$$1) ABCD - \text{прямоугольник}, AB_1 = 16 \text{ см}, \\ CB_1 = 21 \text{ см}, \angle AB_1C = 60^\circ, AB = x \text{ (рис. 80);}$$

$$2) \triangle AB_1C, AC = \sqrt{AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cos 60^\circ} = 19 \text{ см};$$

$$3) \triangle B_1BA, \\ BB_1 = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{256 - x^2};$$

$$4) \triangle ABC, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{361 - x^2};$$

$$5) \triangle B_1BC, BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2} = \sqrt{441 - (361 - x^2)};$$

$$6) 256 - x^2 = 441 - 361 + x^2, x^2 = 88 \text{ см}^2, BB_1 = \sqrt{168} \text{ см};$$

$$7) \triangle B_1BD, B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{529} \text{ см};$$

$$8) R = \frac{1}{2} B_1D = \frac{\sqrt{529}}{2} \text{ см}, S = 4\pi R^2 = 529\pi \text{ см}^3.$$

$$72. 1.$$

73. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

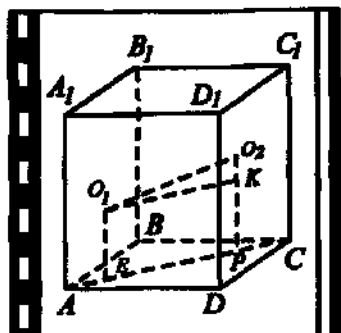


Рис. 81

Указание:

- 1) O_1 – центр шара, вписанного в угол A , $r_1 = \frac{1}{2}$ – его радиус, O_2 – центр шара, вписанного в угол C , r_2 – его радиус, $O_1E \perp ABCD$, $O_2P \perp ABCD$, $O_1K \perp O_2P$;
- 2) $O_2K = O_2P - O_1E = r_2 - r_1$,
 $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (рис. 81);

3) $\triangle ABC$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

4) $\triangle O_2KO_1$, $O_1K = EP = AC - AE - PC = \frac{3\sqrt{2}}{2} - r_1\sqrt{2} - r_2\sqrt{2}$,

$$O_1O_2^2 = O_1K^2 + O_2K^2, (r_1 + r_2)^2 = 2\left(\frac{3}{2} - (r_1 + r_2)\right)^2 + (r_2 - r_1)^2,$$

$$r_2^2 - 3r_2 + 1 \Rightarrow r_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

74. $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$.

75. $\frac{19\pi a^2}{9}$.

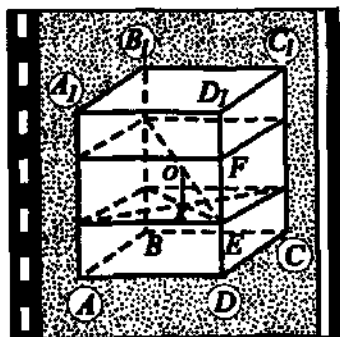


Рис. 82

Указание:

- 1) $AB = a$, $DE = EF = FD_1 = \frac{a}{3}$,
 O – центр куба, $OK \perp ABCD$ (рис. 82);
 - 2) $\triangle ABD$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$;
 - 3) $\triangle OKE$, $KE = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;
- $$OK = \frac{EF}{2} = \frac{a}{6},$$

$$OE = R = \sqrt{OK^2 + KE^2} = \frac{a\sqrt{19}}{6};$$

4) $S = 4\pi R^2 = \frac{19\pi a^2}{9}$.

76. $\frac{416\pi}{3} \text{ см}^3, 94\pi \text{ см}^2$.

77. $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.

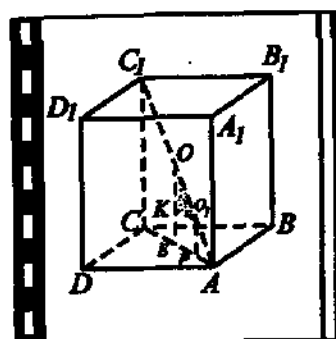


Рис. 83

Указание:

- 1) $AB = a$, O – центр шара, r – его радиус, O_1 – центр другого шара, r_1 – его радиус, $OE \perp ABCD$, $O_1K \perp OE$, $O_1 \in AC_1$, $O_1P \perp ABCD$ (рис. 83);

2) $\triangle ABC$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$;

3) $\triangle ACC_1$, $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = a\sqrt{3}$,

$$\sin \angle C_1AC = \frac{CC_1}{AC_1} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

4) $\triangle OKO_1$, $OO_1 = r + r_1$, $OK = r - r_1$, $r = \frac{a}{2}$,

$$OK = OO_1 \cdot \sin \angle OO_1K = \frac{r+r_1}{\sqrt{3}}, r - r_1 = \frac{r+r_1}{\sqrt{3}}, r_1 = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}.$$

78. $\frac{3}{8}a^2$.

79. $\frac{1}{2}a^2 \sin \alpha \sqrt{4\lg^2 \beta + 1}$.

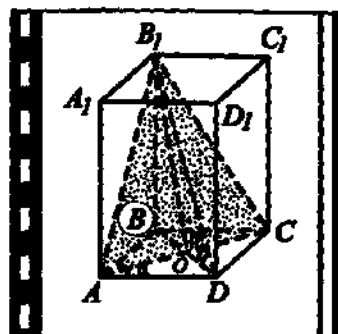


Рис. 84

Указание:

- 1) $ABCD$ – ромб, $AB = BC = a$,
 $\angle BAD = \alpha$, $\angle B_1DB = \beta$,
 O – центр грани $ABCD$ (рис. 84);

2) $\triangle OAD$, $AO = AD \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$OD = AD \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$BD = 2OD = 2a \sin \frac{\alpha}{2};$$

3) $\triangle B_1BD$, $BB_1 = BD \operatorname{tg} \beta = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$;

4) $\triangle B_1BO$, $B_1O = \sqrt{B_1B^2 + BO^2} = a \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \beta + 1}$;

5) $\triangle AB_1C$, $S_{AB_1C} = AO \cdot B_1O = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \beta + 1}$.

80. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

81. $\frac{1}{2} a(\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$.

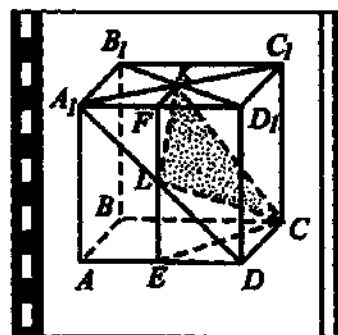


Рис. 85

Указание:

- 1) $A_1F = FD_1$, $AE = ED$ (рис. 85);

2) $FK = LF = EL = \frac{a}{2}$;

3) $\triangle LFK$, $LK = \sqrt{LF^2 + FK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

4) $\triangle LEC$, $LC = \sqrt{LE^2 + EC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

$$LC = CK;$$

5) $P_{KLC} = CK + LC + KL = \frac{1}{2} a(\sqrt{2} + 2\sqrt{6})$.

82. $\frac{3a\sqrt{6}}{2}$.

83. $2 \arcsin \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.

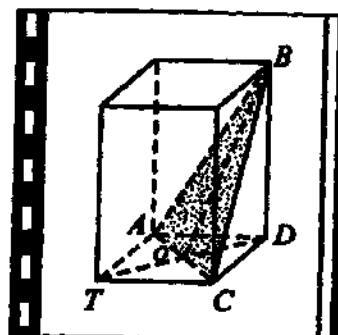


Рис. 86

Указание:

- 1) $TADC$ – квадрат, O – его центр,
 $\angle BOD = \alpha$, $\angle ABC = 2\alpha$ (рис. 86);

2) $\triangle BOD$, $\cos \alpha = OD : OB$;

3) $\triangle BOC$, $\operatorname{ctg} \alpha = OB : OC = OB : OD$
 $\Rightarrow OB = OD \operatorname{ctg} \alpha$;

4) $\cos \alpha = \frac{OD}{OB}$, $\cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$,

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0, \sin \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, \angle ABC = 2 \arcsin \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

84. 3 дм^2 .

85. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}, \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

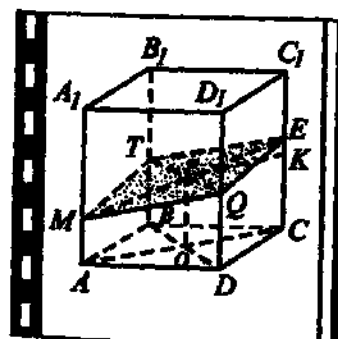


Рис. 87

Указание:

- 1) $ABCD$ – квадрат,
 $MTEQ$ – ромб, $TQ \parallel BD$, $PK \parallel OC$,
 $\angle EPK = 30^\circ$, $\angle TEQ = \alpha$ (рис. 87);

2) $\triangle EKP$, $PE = x$, $EK = \frac{x}{2}$,

$$PK = \sqrt{PE^2 - EK^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

3) $\triangle EPQ$, $PQ = OD = OC = PK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$;

$$4) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = PQ : PE = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\angle MTE = \pi - \alpha = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$86. \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$87. \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

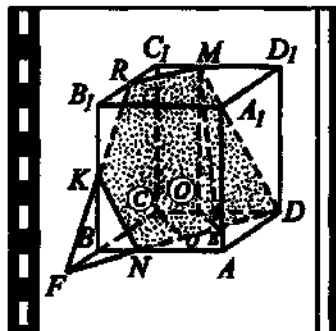


Рис. 88

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $C_1M = MD_1$, $AD = x$,
 $AN = 2NB$, $NK \parallel DM$, $RM \parallel ND$,
 $F = ND \cap BC$, $MO \perp CD$, $CQ \perp DN$,
 $OE \parallel CQ$, $\angle MEO = \alpha$;

2) $\triangle FBN \sim \triangle DAN$, $BF : AD = BN : NA$
 $\Rightarrow BF = \frac{x}{2}$, $CF = BF + BC = \frac{3x}{2}$ (рис. 88);

3) $\triangle FCD$, $FD = \sqrt{CF^2 + CD^2} = \frac{x\sqrt{13}}{2}$,

$CF \cdot CD = FD \cdot CQ$, следовательно, $CQ = \frac{3x}{\sqrt{13}}$;

4) $\triangle CQD$, $CO = OD$, $EO \parallel CQ \Rightarrow OE = \frac{1}{2} CQ = \frac{3x}{2\sqrt{13}}$;

5) $\triangle MOE$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OM}{OE} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

$$88. \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

$$89. \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

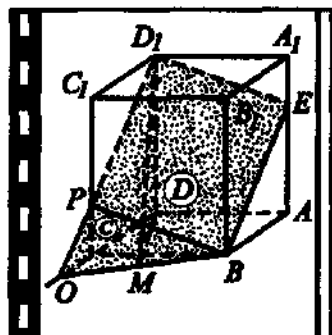


Рис. 89

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AD = x$,
 $C_1P = 2CP$, $O = D_1P \cap DC$,
 $DM \perp BO$, $\angle D_1MD = \alpha$ (рис. 89);

2) $\triangle C_1PD_1 \sim \triangle CPO$, $C_1D_1 : CO = C_1P : CP$,
 $CO = \frac{x}{2}$;

3) $\triangle BCO$, $BO = \sqrt{BC^2 + CO^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$;

4) $\triangle DBO$, $S_{DBO} = \frac{1}{2} (DB \cdot DO \sin 45^\circ) = \frac{3x^2}{4}$, $S_{DBO} = \frac{BO \cdot DM}{2}$,

$$\frac{3x^2}{4} = \frac{x\sqrt{5}DM}{4} \Rightarrow DM = \frac{3x}{\sqrt{5}};$$

5) $\triangle D_1DM$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{DD_1}{DM} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$90. \arccos \frac{1}{3}.$$

$$91. \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

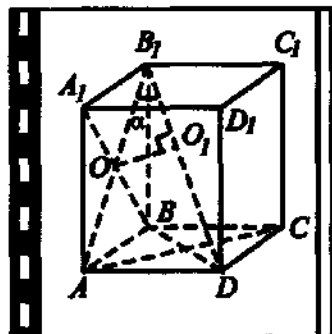


Рис. 90

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = a$, O – центр
 грани AA_1B_1B , $OO_1 \perp DB_1$, $\angle AB_1D = \alpha$;

2) $\triangle B_1AD$, $\sin \alpha = \frac{AD}{B_1D} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (рис. 90);

3) $\triangle ABB_1$, $AB_1 = \sqrt{BB_1^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$,
 $OB_1 = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

4) $\triangle B_1O_1O$, $OO_1 = OB_1 \cdot \sin \alpha = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

92. $h\sqrt{6}$.

93. 28 см^2 .

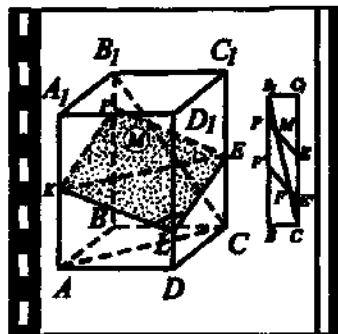


Рис. 91

Указание:

1) $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 4 \text{ см}$, $AD = 6 \text{ см}$, $AA_1 = 8 \text{ см}$, $AK = KA_1$, $DL = 2 \text{ см}$, $MC = 2B_1M$, $PE \parallel KL$, $M \in PE$, $\angle KLE = \alpha$, $P'E' \parallel PE$, $F = B_1C \cap P'E'$ (рис. 91);

$$2) \Delta B_1BC, B_1C = \sqrt{B_1B^2 + BC^2} = 10 \text{ см},$$

$$B_1M = \frac{B_1C}{3} = \frac{10}{3} \text{ см};$$

$$3) \Delta B_1MP \sim \Delta B_1FP',$$

$$B_1M : B_1F = B_1P : B_1P', \frac{10}{3} : \frac{20}{3} = \frac{B_1P}{4} \Rightarrow B_1P = 2 \text{ см};$$

$$4) KPEL - \text{параллелограмм}, KL = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{AK}{2}\right)^2} = \sqrt{40} \text{ см},$$

$$LE = \sqrt{DC^2 + \left(\frac{CE}{2}\right)^2} = \sqrt{20} \text{ см}, KE = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{52} \text{ см};$$

$$5) \Delta KLE, KE^2 = KL^2 + LE^2 - 2KL \cdot LE \cos \alpha, \text{ следовательно,}$$

$$\cos \alpha = \frac{KL^2 + LE^2 - KE^2}{2KL \cdot LE} = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{7}{5\sqrt{2}};$$

$$6) S_{KLEP} = KL \cdot LE \sin \alpha = 28 \text{ см}^2.$$

94. 124 см^2 .

95. $\arctg(2\sqrt{5})$.

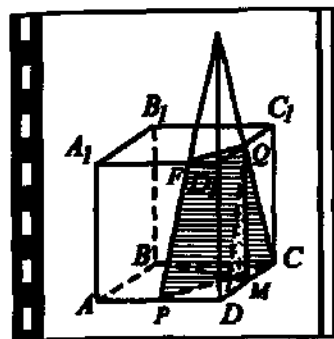


Рис. 92

Указание:

1) $AP = PD$, $D_1Q = QC_1$, $M \in DC$, $QM \parallel CC_1$, $L = BM \cap CP$, $F \in A_1D_1$, $QF \parallel CP$, $\angle QLM = \alpha$, $AB = a$ (рис. 92);

$$2) \Delta CDP, CP = \sqrt{CD^2 + DP^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$3) \Delta CLM \sim \Delta CDP, CM : CP = LM : PD,$$

$$\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = LM : \frac{a}{2} \Rightarrow LM = \frac{a}{2\sqrt{5}};$$

$$4) \Delta QML, \tg \alpha = \frac{QM}{ML} = 2\sqrt{5}, \alpha = \arctg(2\sqrt{5}).$$

96. $\arccos\left(-\frac{5}{3\sqrt{17}}\right)$.

97. $2a^3, \frac{4}{3}a^2\sqrt{3}$.

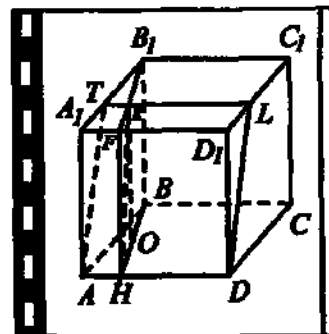


Рис. 93

Указание:

1) $ABCD$ – ромб, $BB_1 = a$, $AB = 2a$, $\angle BAD = 30^\circ$, $T \in A_1B_1$, $L \in D_1C_1$, $TL \parallel AD$, $BH \perp AD$, $KO \perp BH$, $\angle KHB = 60^\circ$ (рис. 93);

$$2) \Delta BHA, BH = \frac{AB}{2} = a;$$

$$3) \Delta KOH, KO = BB_1 = a,$$

$$KH = \frac{KO}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}};$$

$$4) V = S_{ABCD} \cdot KO = BH \cdot AD \cdot KO = 2a^3, S_{сеч} = AD \cdot KH = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}.$$

98. $\frac{3a^2}{8}$.

99. $a\sqrt{6}$, $a\sqrt{10}$.

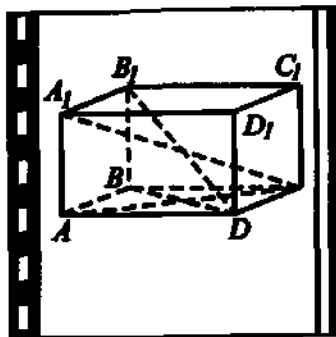


Рис. 94

Указание:

- 1) $AB = a$, $AD = 2a$, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $\angle BDB_1 = 45^\circ$ (рис. 94);
- 2) $\triangle ABD$,
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ = 3a^2$,
 $BD = a\sqrt{3}$;
- 3) $\triangle BB_1D$, $BB_1 = BD \tan 45^\circ = a\sqrt{3}$;

4) $B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = a\sqrt{6}$;

5) $ABCD$, $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, следовательно, $AC^2 = 7a^2$;

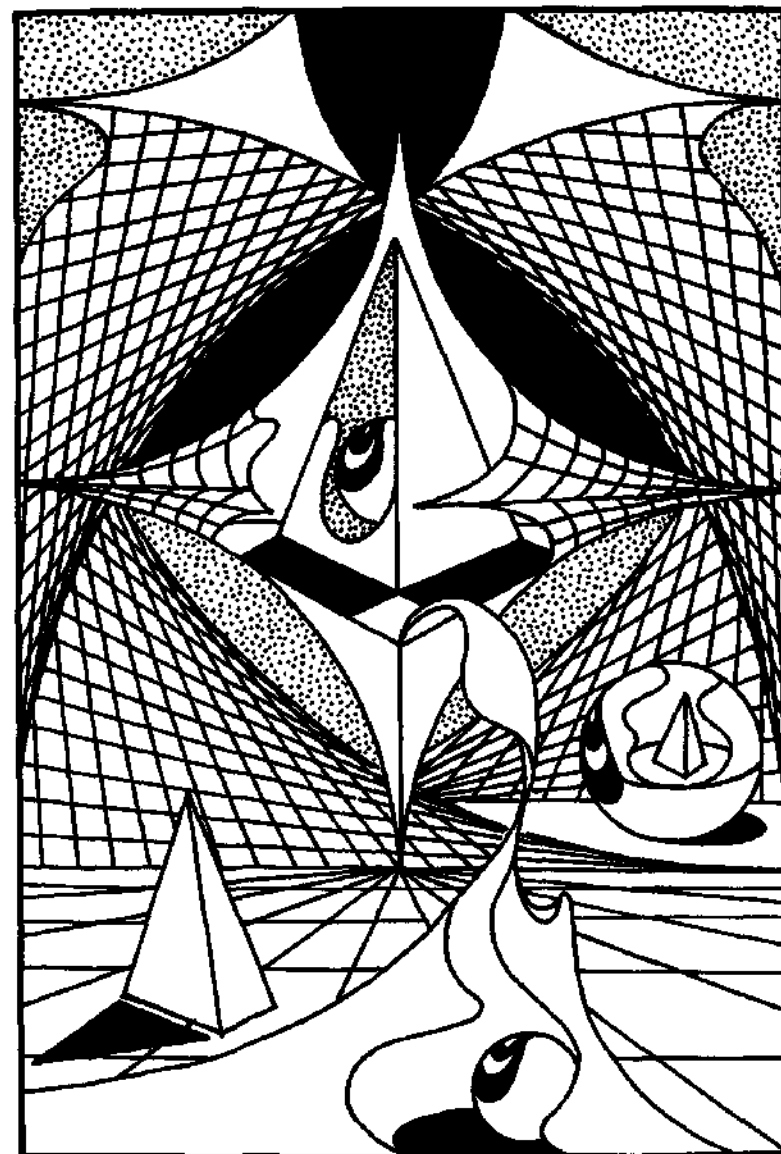
6) $AA_1 = BB_1 = a\sqrt{3}$;

7) $\triangle AA_1C$, $A_1C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = a\sqrt{10}$.

100. 625 см^2 , $25\sqrt{601} \text{ см}^2$.

3

Пирамида



3. ПИРАМИДА

3.1. Формулы, задачи

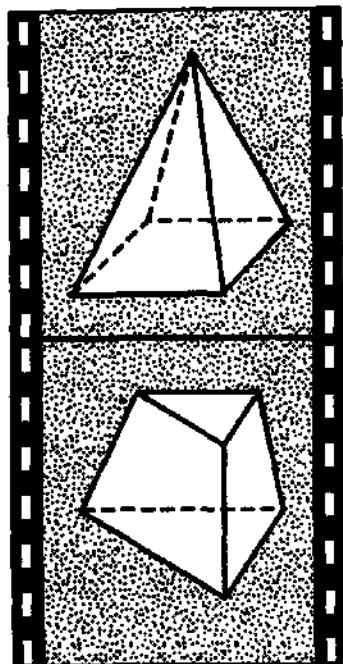


Рис. 95

1. Произвольная пирамида (S – площадь основания; H – высота; V – объем).

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

2. Правильная пирамида (P – периметр основания; l – апофема; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности; V – объем).

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} Pl, V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

3. Произвольная усеченная пирамида (S_1, S_2 – площади оснований; h – высота; V – объем).

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

4. Правильная усеченная пирамида (P_1, P_2 – периметры оснований; l – апофема; $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности).

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) l.$$

5. Сфера, описанная около пирамиды:

- 1) для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность;
- 2) около всякого тетраэдра можно описать сферу.

6. Сфера, вписанная в пирамиду:

- 1) если в основание пирамиды можно вписать окружность, а вершина пирамиды ортогонально проектируется в центр этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу;
- 2) в любую правильную пирамиду можно вписать сферу;
- 3) в любой тетраэдр можно вписать сферу.

7. Центр окружности, описанной около основания пирамиды:

- 1) если все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды;
- 2) если длины всех боковых ребер пирамиды равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания.

8. Центр окружности, вписанной в основание пирамиды:

- 1) если все боковые грани пирамиды образуют с основанием равные углы, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды;
- 2) если длины всех апофем боковых граней пирамиды равны, то основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в основание пирамиды.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α . Найдите угол наклона боковой грани к основанию пирамиды.

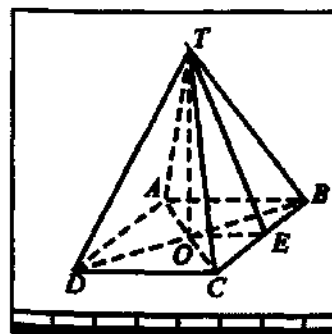


Рис. 96

Решение. Основание высоты TO данной пирамиды есть центр окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Пусть точка E – середина ребра BC . Тогда отрезок OE перпендикулярен ребру BC (медиана OE в равнобедренном треугольнике COB является высотой). По теореме о трех перпендикулярах отрезок TE перпендикулярен ребру BC , следовательно, $\angle OET = \varphi$ – искомый. Обозначим длину отрезка CE через x , то-

гда в прямоугольном треугольнике TEC ($\angle TEC = 90^\circ$, $\angle CTE = \frac{\alpha}{2}$, $CE = x$) катет $TE = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Из прямоугольного треугольника TOE находим $\cos \varphi = \frac{OE}{TE} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $\varphi = \arccos\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$ (рис. 96).

Задача 2. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник, боковые стороны которого имеют длину a и образуют угол α . Двугранные углы при всех сторонах основания равны β . Определите площадь полной поверхности пирамиды.

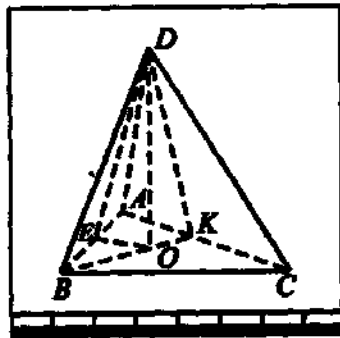


Рис. 97

Решение. Пусть в основании пирамиды $ABCD$ лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$). По условию все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Поэтому основание высоты пирамиды совпадает с центром O окружности, вписанной в треугольник ABC (точка O лежит на высоте BK треугольника ABC). Проведем $OE \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AC$ и $DE \perp AB$. Таким

образом, $\angle DEO = \angle DKO = \beta$. Находим $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$.

В прямоугольном треугольнике AKB катет $AK = AB \sin \frac{\alpha}{2} = a \sin \frac{\alpha}{2}$.

$AC = 2AK = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$. Отрезок OK – радиус вписанной окружности,

следовательно, $OK = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + AC} = \frac{a \sin \alpha}{2(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$. В прямоуголь-

ном треугольнике DOK гипотенуза $DK = \frac{OK}{\cos \beta} = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos \beta (1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$.

Теперь можем найти $S_{ADC} = \frac{1}{2} DK \cdot AC = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta (1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$ и

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} DE \cdot AB = \frac{1}{2} DK \cdot AB = \frac{a^2 \sin \alpha}{4 \cos \beta (1 + \sin \frac{\alpha}{2})} \quad (\text{рис. 97}).$$

Полная поверхность пирамиды $S_{\text{полн}} = 2S_{ADB} + S_{ADC} + S_{ABC} =$

$$= \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta (1 + \sin \frac{\alpha}{2})} + \frac{a^2 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta (1 + \sin \frac{\alpha}{2})} + \frac{a^2 \sin \alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right).$$

Задача 3. Найдите косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

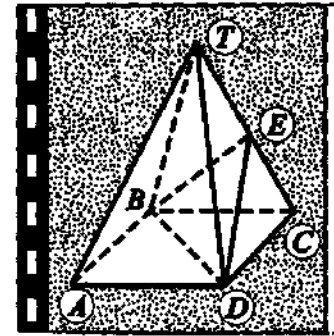


Рис. 98

Решение. Пусть точка E – середина ребра TC . Так как треугольники DTC и BTC равносторонние, то $DE \perp TC$ и $BE \perp TC$ (рис. 98). Следовательно, $\angle BED = \alpha$ – искомый. Обозначим длину ребра пирамиды через x . В прямоугольном треугольнике DEC катет $DE = \sqrt{DC^2 - EC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Из треугольни-

ка BED по теореме косинусов нахо-

$$\text{дим } \cos \alpha: BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE \cdot ED \cos \alpha, \quad 2x^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} - 2 \frac{3x^2}{4} \cos \alpha, \quad \text{откуда } \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Задача 4. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α и удалены от середины противоположной стороны основания на расстоянии a .

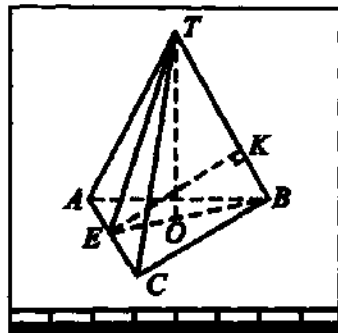


Рис. 99

Решение. Пусть точка E – середина ребра AC , тогда $BE \perp AC$. Отрезок TO – высота пирамиды, где точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Проведем $EK \perp TB$. По условию $EK = a$, $\angle TBE = \alpha$ (рис. 99).

В прямоугольном треугольнике BKE находим $BE = \frac{a}{\sin \alpha}$, $KB = a \operatorname{ctg} \alpha$. Обозначим через x длину стороны основания пирамиды. Из прямоугольного треугольника BEC находим катет

$$BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}. \text{ Следовательно, } \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sin \alpha}, x = \frac{2a}{\sqrt{3} \sin \alpha}.$$

Теперь находим $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{a^2}{\sqrt{3} \sin^2 \alpha}$. Треугольники TOB и EKB подобны ($\angle TBE = \angle KBE = \alpha$, $\angle TOB = \angle EKB = 90^\circ$), следовательно, $EK : TO = KB : BO$, откуда $TO = \frac{EK \cdot BO}{KB} = \frac{2a}{3 \cos \alpha}$.

$$\text{Значит, объем пирамиды } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot TO = \frac{2\sqrt{3}a^3}{27 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60° . Через вершину основания параллельно противоположащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении $1 : 2$, считая от основания. Найдите площадь сечения.

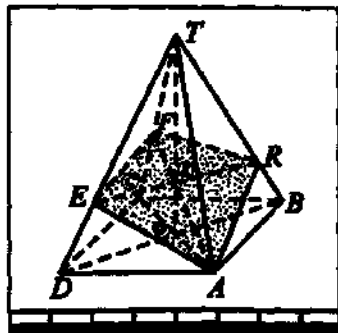


Рис. 100

Решение. По условию основание высоты TO пирамиды $ABCDT$ совпадает с центром O квадрата $ABCD$, $AB = 8$, $\angle TAC = 60^\circ$. Через точку K , принадлежащую отрезку OT ($KO : KT = 1 : 2$), проведем ER параллельно DB (рис. 100). Пусть F – точка пересечения прямой AK и ребра CT , тогда $AEFR$ – данное сечение. По теореме Пифагора из тре-

угольника ADC находим $AC = \sqrt{DC^2 + DA^2} = 8\sqrt{2}$ (см). В прямоугольном треугольнике AOT катет $TO = AO \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{6}$ (см). Так как треугольник ATC равносторонний ($TC = TA$, $\angle TCA = \angle CAT = 60^\circ$), то $AF = TO = 4\sqrt{6}$ (см). Треугольники TDB и TER подобны ($\angle TER = \angle TDB$, $\angle ETR = \angle DTB$), следовательно, $TO : TK = DB : ER$, откуда $ER = \frac{TK \cdot DB}{TO} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ (см). Так как $AF \perp ER$,

$$\text{то } S_{AEFR} = \frac{1}{2} AF \cdot ER = \frac{64\sqrt{3}}{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Задача 6. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$, плоские углы которого при вершине D прямые, выполняется равенство $S_{ADB}^2 = S_{AOB} \cdot S_{ACB}$, где точка O – основание высоты, проведенной из вершины D .

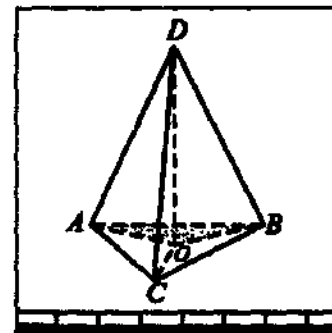


Рис. 101

Доказательство. Треугольник AOB является ортогональной проекцией треугольника ADB на плоскость ABC .

Следовательно, $\cos \alpha = \frac{S_{AOB}}{S_{ADB}}$, где α –

угол между плоскостями ADB и ABC . Треугольник ADB – ортогональная проекция треугольника ACB на плоскость

ADB . Значит, $\cos \alpha = \frac{S_{ADB}}{S_{ACB}}$.

Сравнивая полученные равенства, имеем $\frac{S_{AOB}}{S_{ADB}} = \frac{S_{ADB}}{S_{ACB}}$, или $S_{ADB}^2 = S_{AOB} \cdot S_{ACB}$ (рис. 101).

Задача 7. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$, плоские углы которого при вершине D прямые, выполняется равенство $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$, где S_1 , S_2 , S_3 – площади боковых граней, а S – площадь грани, лежащей против вершины D .

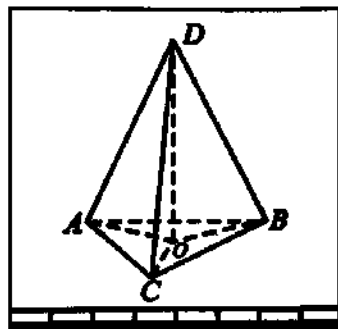


Рис. 102

Доказательство. Обозначим $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ADB}$, $S_2 = S_{ADC}$, $S_3 = S_{BDC}$. Пусть точка O – основание высоты, опущенной из вершины D . Тогда справедливы равенства $S_1^2 = S_{ABO} \cdot S$, $S_2^2 = S_{AOC} \cdot S$, $S_3^2 = S_{BOC} \cdot S$. Складывая почленно эти равенства, получаем $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = (S_{ABO} + S_{AOC} + S_{BOC})S = S^2$ (рис. 102).

Задача 8. Докажите, что для любого тетраэдра $ABCD$, плоские углы которого при вершине D прямые, выполняется равенство $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где a, b, c – длины взаимно перпендикулярных боковых ребер, H – длина высоты, опущенной из вершины D на основание ABC .

Доказательство. Объем тетраэдра $ABCD$ определяется формулами $V = \frac{1}{6}abc$, $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot H$. Так как $S_{ABC} = \sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}$, то $\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}H\sqrt{S_{ADB}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2}$. Таким образом, $a^2b^2c^2 = H^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. Отсюда следует, что $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

3.2. Задачи

1. Каждое боковое ребро четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α . Основание пирамиды – прямоугольник с углом β между диагоналями. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна h .
2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с высотой пирамиды угол 45° . Длина бокового ребра равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны b , а острый угол равен α . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите объем пирамиды.
4. Основанием пирамиды является прямоугольник с меньшей стороной a и углом между диагоналями α . Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β .
5. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и образует с плоскостью основания угол α . Определите боковую поверхность пирамиды.
6. Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого a и b , а угол между ними 120° . Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите объем пирамиды.
7. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b и составляют угол α . Каждое из боковых ребер пирамиды образует с высотой пирамиды угол φ . Найдите объем пирамиды.
8. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна S , высота пирамиды образует с боковым ребром пирамиды угол α . Найдите площадь поверхности сферы, диаметр которой равен высоте данной пирамиды.
9. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.
10. Найдите боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания a , диагональное сечение равновелико основанию.
11. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в a раз больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине этой пирамиды.

12. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.
13. Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.
14. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найдите этот угол.
15. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, если известно, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .
16. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Найдите высоту пирамиды.
17. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Каждая боковая грань образует с плоскостью основания угол β . Определите объем пирамиды.
18. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α , а высота – h . Определите объем пирамиды.
19. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8, а плоский угол при вершине 45° . Найдите полную поверхность пирамиды.
20. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна a . Найдите полную поверхность пирамиды и ее объем.
21. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды высотой h , если известно, что отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k .
22. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 см и 18 см, а площадь равна 90 см^2 . Высота пира-

- миды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определите боковую поверхность этой пирамиды.
23. Расстояние от центра основания правильной треугольной пирамиды до ее боковой грани равно a . Двугранный угол при основании равен φ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 24. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α и удалена от противоположной вершины на расстояние a .
 25. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b . Определите объем пирамиды.
 26. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем и площадь полной поверхности пирамиды.
 27. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45° . Объем пирамиды равен $\frac{1}{3} \text{ м}^3$. Найдите длину стороны основания.
 28. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
 29. Основание пирамиды $HABCD$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, $AB = 2AD$. Грань HAD является равнобедренным треугольником и перпендикулярна плоскости основания пирамиды, грань HBC наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите величины углов, образуемых боковыми ребрами пирамиды с плоскостью ее основания.
 30. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α .
 31. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Найдите двугранный угол при боковом ребре.

вильной треугольной пирамиде через сторону основания (единицу противоположного бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите высоту боковой грани пирамиды, если сторона основания равна 1 дм.

33. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Определите ее объем и площадь сечения, проходящего через сторону основания, перпендикулярно боковому ребру, противолежащему этой стороне.
34. В правильной треугольной пирамиде известны высота H и величина двугранного угла 2α , образованного боковыми гранями. Найдите длину стороны основания.
35. Из середины стороны основания правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный a . Найдите высоту пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен 2β .
36. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен углу ее ребра с плоскостью основания. Вычислите объем пирамиды, если сторона основания равна 1.
37. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a , острый угол — α . Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен φ . Найдите объем пирамиды.
38. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 6 см и острым углом 30° . Двугранные углы при основании равны 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.
39. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° . Сторона основания 2 см. Определите боковую поверхность пирамиды.
40. Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , боковое ребро равно a . Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно ему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

41. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60° . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противолежащему ребру.
42. Боковые грани пирамиды, в основании которой равнобедренная трапеция с высотой h , одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен α , а площадь сечения равна S . Найдите объем пирамиды.
43. Дана четырехугольная пирамида, основанием которой является квадрат и одно из ребер которой перпендикулярно плоскости основания. В эту пирамиду вписан куб так, что нижнее основание куба лежит на основании пирамиды, а стороны верхнего основания куба лежат на боковых гранях пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α , а ребро куба равно a .
44. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. Вычислите площадь сечения, если боковое ребро равно 18 см, а диагональ основания — $16\sqrt{2}$ см.
45. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, сторона основания равна 12 см. Вычислите площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.
46. Треугольная пирамида $ABCD$ пересекается с плоскостью α по четырехугольнику $EFGH$ так, что вершины E и F лежат на ребрах AB и AC . Отношение сторон EF и EH равно 3. Известно, что плоскость α параллельна противоположным ребрам AD и BC , отношение которых равно 1 : 3. Найдите отношение, в котором точка E делит ребро AB .
47. Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30° . Через сторону основания пирамиды

- проведена плоскость, перпендикулярная противоположащей грани. Найдите отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды этой плоскостью.
48. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найдите площадь сечения и объем пирамиды, если известны сторона основания a и угол α между сечением и основанием.
49. В правильном тетраэдре $TABC$ через его вершину T проведена плоскость, перпендикулярная плоскости ABC и параллельная AB . Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, если ребро тетраэдра имеет длину a .
50. Основанием пирамиды является правильный треугольник: одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?
51. Основанием пирамиды $TABC$ является равносторонний треугольник ABC . Боковая грань TAB перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к основанию под углом β . Найдите угол между плоскостью основания и ребром TC .
52. Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ равны b , углы при ее вершине равны следующим величинам: $\angle ATB = \angle ATC = \frac{\pi}{3}$, $\angle BTC = \frac{\pi}{2}$. Найдите высоту пирамиды.
53. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов, лежащего в основании прямоугольного треугольника. Найдите этот угол, если гипотенуза треугольника равна c , а объем пирамиды равен V .
54. Найдите объем пирамиды, основанием которой служит прямоугольный треугольник с гипотенузой длиной 6 см и острым углом величиной в 30° , если боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° .

55. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник, а двугранные углы при основании равны α , α и $\frac{\pi}{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее высота равна H .
56. В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно основанию. Определите объем пирамиды, если ее наибольшее боковое ребро равно l , а отрезок, соединяющий центр основания с вершиной, равен b .
57. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите объем пирамиды.
58. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны a . Найдите объем пирамиды.
59. Основанием четырехугольной пирамиды $TABCD$ служит квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром TB . Найдите высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3 см, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15 см.
60. В основании треугольной пирамиды $TABC$ лежит правильный треугольник ABC . Боковое ребро пирамиды TA перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если величина угла между прямой TA и прямой, проходящей через точку C и середину ребра TB , равна 60° , а расстояние между этими прямыми равно 2 см.
61. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
62. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует со стороной основания угол α . Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R . Найдите боковую поверхность этой пирамиды.
63. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α . Найдите сторону основания пирамиды.

64. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно a и составляет со смежными сторонами треугольника углы α и β . Найдите объем пирамиды.
65. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб, сторона которого равна 6 см, а острый угол – 60° . Вершина пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем пирамиды, если ребро, проведенное к тупому углу ромба, образует с плоскостью основания угол, равный 60° .
66. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a , а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α . Определите полную поверхность пирамиды.
67. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определите угол наклона грани пирамиды к плоскости основания, если известно, что отношение объема пирамиды к объему шара $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.
68. Найдите радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным α .
69. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой в 4 раза больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.
70. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра верхнего и нижнего оснований соответственно равны a и b ($a < b$), двугранный угол у ребра нижнего основания равен α . Определите объем усеченной пирамиды.
71. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны основания равны 5 см и 11 см, а диагональ пирамиды 12 см. Определите боковую поверхность пирамиды.
72. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру DC , длина AB равна a , длина DC равна b . Углы, образованные DC с гранями ABC и ABD , равны α . Найдите объем пирамиды.

3.3. Ответы и указания

$$1. \frac{2}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta.$$

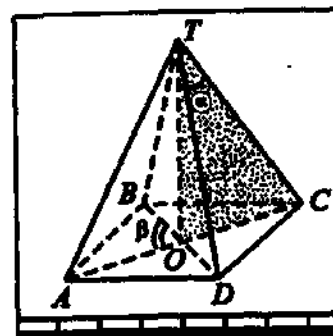


Рис. 103

Указание:

$$1) TO = h, \angle CTO = \alpha, \angle BOA = \beta \text{ (рис. 103);}$$

$$2) \triangle TOC, OC = h \operatorname{tg} \alpha,$$

$$AC = 2OC = 2h \operatorname{tg} \alpha;$$

$$3) S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \beta = 2h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta;$$

$$4) V_{TABC} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TO = \frac{2}{3} h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta.$$

$$2. 4\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

$$3. \frac{2}{3} b^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

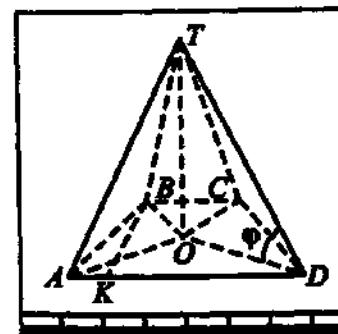


Рис. 104

Указание:

$$1) AB = BC = CD = b, \angle BAD = \alpha, \text{ точка } O - \text{ центр описанной около трапеции } ABCD \text{ окружности, } OD = R - \text{ радиус окружности, } TO - \text{ высота, } \angle ODT = \varphi, BK \perp AD;$$

$$2) \triangle ABK, AK = b \cos \alpha, BK = b \sin \alpha \text{ (рис. 104);}$$

$$3) AD = BC + 2AK = b + 2b \cos \alpha;$$

$$4) S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BK = \\ = 4b^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$5) \triangle ABD, BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha \Rightarrow BD = 2b \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$2R = \frac{BD}{\sin \alpha} \text{ (теорема синусов), } R = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$6) \triangle TOD, TO = OD \operatorname{tg} \varphi = \frac{b \operatorname{tg} \varphi}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$7) V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TO = \frac{2}{3} b^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

$$4. \frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$5. \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cos \alpha \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}.$$

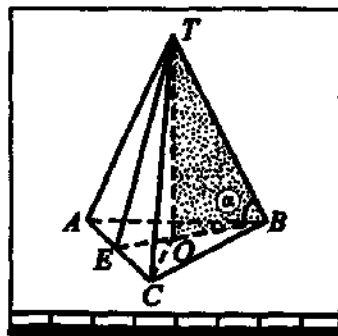


Рис. 105

Указание:

1) Точка O – центр симметрии треугольника ABC , $TO \perp (ABC)$, $TB = a$, $\angle OBT = \alpha$ (рис. 105);

2) $\triangle TOB$, $BO = a \cos \alpha$, $TO = a \sin \alpha$,
 $OE = \frac{OB}{2} = \frac{a \cos \alpha}{2}$;

3) $\triangle EOT$,
 $TE = \sqrt{TO^2 + OE^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}$;

$$4) BE = 3OE = \frac{3a \cos \alpha}{2}, EC = BE \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cos \alpha;$$

$$5) S_{бок} = 3 \cdot EC \cdot TE = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cos \alpha \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}.$$

$$6. \frac{ab \operatorname{tg} \alpha \sqrt{a^2 + ab + b^2}}{12}.$$

$$7. \frac{1}{6} b^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

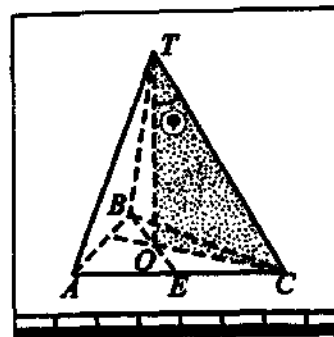


Рис. 106

Указание:

1) $AB = BC$, O – центр описанной окружности, R – ее радиус (рис. 106);

$$2) S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \sin \alpha}{2} = \frac{b^2}{2} \sin \alpha;$$

$$3) \triangle BEC, EC = b \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$AC = 2EC = 2b \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$4) OC = R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) \triangle TOC, \operatorname{ctg} \varphi = \frac{TO}{OC}, TO = \frac{b \operatorname{ctg} \varphi}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$6) V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot TO = \frac{1}{6} b^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

$$8. \frac{4\pi S}{3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$9. \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}).$$

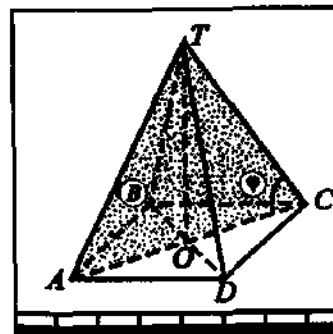


Рис. 107

Указание:

1) $\angle OCT = \varphi$ – искомый (рис. 107);

$$2) BC = x, \triangle ADC, AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} =$$

$$= x\sqrt{2}, OC = \frac{AC}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \triangle TOC, TO = OC \operatorname{tg} \varphi = \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$4) S_{ATC} = \frac{TO \cdot AC}{2} = \frac{x^2 \operatorname{tg} \varphi}{2};$$

$$5) S_{ABCD} = AD \cdot DC = x^2;$$

$$6) \frac{S_{ATC}}{S_{ABCD}} = \sqrt{3}, \frac{\frac{x^2}{2} \operatorname{tg} \varphi}{x^2} = \sqrt{3}, \operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{3}, \varphi = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}).$$

$$10. 3a, \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

$$11. 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right).$$

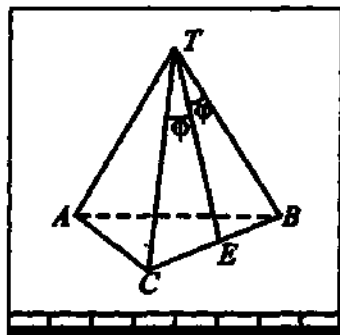


Рис. 108

Указание:

$$1) CE = EB, \angle ETB = \varphi, \angle CTB = 2\varphi, BC = x \text{ (рис. 108);}$$

$$2) \triangle TEB, TE = \frac{x}{2 \operatorname{tg} \varphi};$$

$$3) S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}, S_{бок} = 3S_{CTB} = \frac{3x^2}{4 \operatorname{tg} \varphi};$$

$$4) \frac{S_{бок}}{S_{ABC}} = a, \frac{3x^2}{4 \operatorname{tg} \varphi} : \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = a \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{a}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right), \angle CTB = 2\varphi = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right).$$

$$12. 2 \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$13. 2 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{3}}.$$

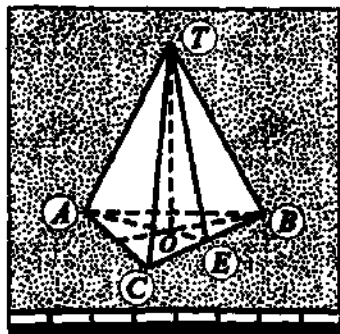


Рис. 109

Указание:

$$1) O - \text{центр симметрии } \triangle ABC, \angle CTB = \angle TBO = \alpha, CE = BE, BC = x \text{ (рис. 109);}$$

$$2) \triangle TEB, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BE}{TB} = \frac{x}{2TB};$$

$$3) \triangle TOB, \cos \alpha = \frac{OB}{TB} = \frac{x\sqrt{3}}{3TB},$$

$$TB = \frac{x\sqrt{3}}{3 \cos \alpha};$$

$$4) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} = 0, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

$$14. 2 \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$15. \frac{2}{3} r^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha}.$$

$$16. 2\sqrt{3}.$$

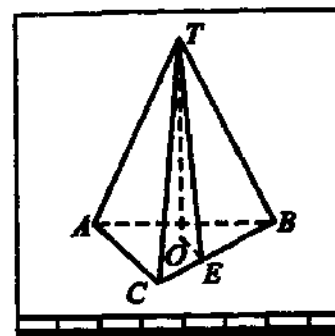


Рис. 110

Указание:

$$1) \angle ACB = 90^\circ, O - \text{центр окружности, вписанной в } \triangle ABC, TO - \text{высота пирамиды, } OE \perp BC, \angle OET = 60^\circ;$$

$$2) \triangle ABC, AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13;$$

$$3) OE = r - \text{радиус окружности, вписанной в } \triangle ABC, r = p - AB,$$

$$p = \frac{AB + BC + CA}{2}, r = 2 \text{ (рис. 110);}$$

$$4) \triangle TOE, TO = OE \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

$$17. \frac{c^3 \sin 2\alpha (\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \operatorname{tg} \beta}{24}.$$

$$18. \frac{4}{3} h^3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

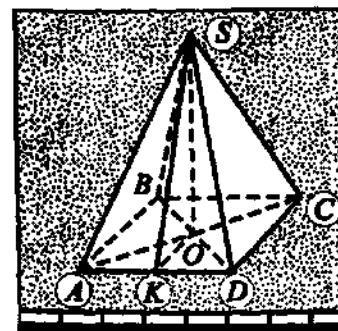


Рис. 111

Указание:

$$1) AD = x, SO = h, AK = KD = \frac{x}{2} \text{ (рис. 111);}$$

$$2) \triangle SKD, SK = KD \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \triangle SOK, SK^2 = SO^2 + OK^2 = h^2 + \frac{x^2}{4};$$

$$4) \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = h^2 + \frac{x^2}{4}, x^2 = \frac{4h^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha};$$

$$5) V = \frac{1}{3} AD^2 \cdot OS = \frac{1}{3} x^2 h = \frac{4}{3} h^3 \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$19. 48\sqrt{2} + 16\sqrt{3}(2 - \sqrt{2}).$$

$$20. \frac{a^2}{2}(\sqrt{7} + 1), \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

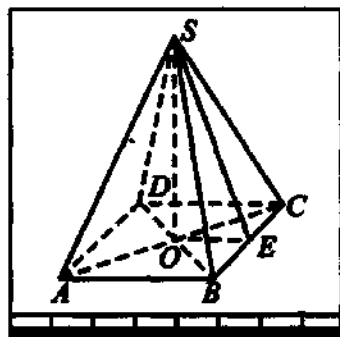


Рис. 112

Указание:

$$1) AC = SB = a, BE = EC \text{ (рис. 112);}$$

$$2) S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a^2}{2} = AB^2,$$

$$AB = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$3) \triangle SOB, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \triangle SOE, SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SE = \frac{a^2\sqrt{7}}{8};$$

$$5) S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{ABCD} = \frac{4a^2\sqrt{7}}{8} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{7} + 1);$$

$$6) V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$21. \frac{h^3\sqrt{3}}{k^2 - 1}.$$

$$22. 192 \text{ см}^2.$$

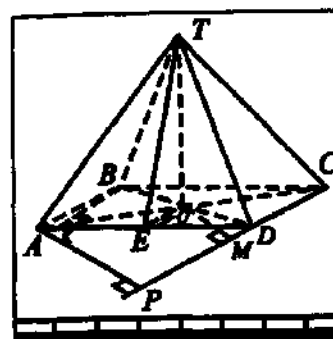


Рис. 113

Указание:

$$1) OT = 6, AD = 18, DC = 10, AE = ED, BK \perp AD, OE \parallel BK, AP \perp CD, OT \perp ABC, OM \parallel AP \text{ (рис. 113);}$$

$$2) S_{ABCD} = BK \cdot AD = DC \cdot AP = 90 \Rightarrow BK = 5, AP = 9;$$

$$3) OE = \frac{BK}{2} = \frac{5}{2}, OM = \frac{AP}{2} = \frac{9}{2};$$

$$4) \triangle TOE, TE = \sqrt{OT^2 + OE^2} = \frac{13}{2},$$

$$S_{ATD} = \frac{AD \cdot TE}{2} = \frac{117}{2};$$

$$5) \triangle DTC, TM = \sqrt{TO^2 + OM^2} = \frac{15}{2}, S_{TDC} = \frac{DC \cdot TM}{2} = \frac{75}{2};$$

$$6) S_{\text{бок}} = 2S_{ATD} + 2S_{TDC} = 192.$$

$$23. \frac{6a^2\sqrt{3}}{\sin \varphi \sin 2\varphi}.$$

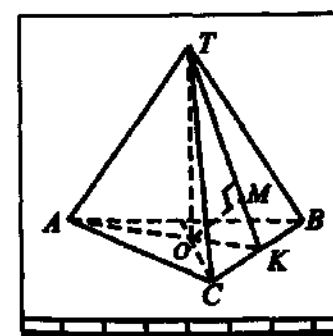


Рис. 114

Указание:

$$1) CK = KB, TK \perp CB, OM \perp TK, \angle AKT = \varphi, O - \text{центр } \triangle ABC, OM = a;$$

$$2) \triangle OMK, OK = \frac{OM}{\sin \varphi} = \frac{a}{\sin \varphi} \text{ (рис. 114);}$$

$$3) \triangle TOK, TK = \frac{OK}{\cos \varphi} = \frac{2a}{\sin 2\varphi},$$

$$AK = 3OK = \frac{3a}{\sin \varphi};$$

$$4) \triangle AKC, AC = \frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{6a}{\sqrt{3} \sin \varphi};$$

$$5) S_{\text{бок}} = 3S_{CTB} = 3 \cdot \frac{1}{2} BC \cdot TK = \frac{6a^2\sqrt{3}}{\sin \varphi \sin 2\varphi}.$$

$$24. \frac{\sqrt{3}a^3}{27 \sin^2 \alpha \cos \alpha}.$$

$$25. \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

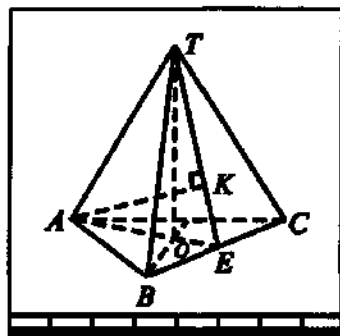


Рис. 115

Указание:

1) $BE = EC$, $AK \perp TE$, $BC = a$,
 $AK = b$ (рис. 115);

2) $\triangle ABE$, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$OE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

3) $\triangle AKE$,

$$KE = \sqrt{AE^2 - AK^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{2};$$

$$4) \triangle AKE \sim \triangle TOE, TO : b = OE : KE \Rightarrow TO = \frac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4b^2}};$$

$$5) V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot TO = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

$$26. \frac{a^3}{24}, \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2} + 1).$$

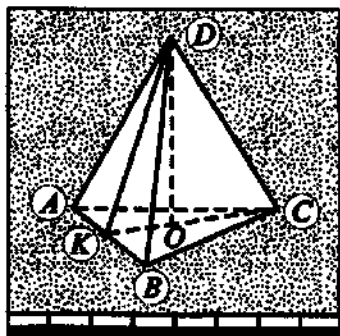


Рис. 116

Указание:

1) $BC = a$, O - центр основания, $AK = KB$, $\angle DKO = 45^\circ$, $DO \perp ABC$;

2) $\triangle CKB$, $CK = \sqrt{CB^2 - KB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$OK = \frac{CK}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

3) $\triangle DOK$, $OK = OD$, $KD = \frac{OK}{\cos 45^\circ} =$

$$= \frac{a}{\sqrt{6}}, S_{ADB} = \frac{AB \cdot KD}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{6}};$$

$$4) V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OD = \frac{a^3}{24} \text{ (рис. 116);}$$

$$5) S_{\text{полн}} = 3S_{ADB} + S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2} + 1).$$

27. 2 м.

$$28. \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

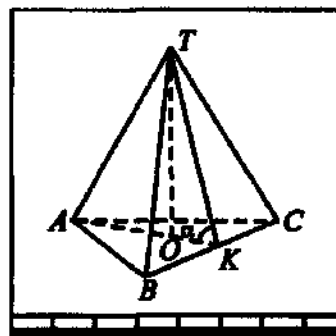


Рис. 117

Указание:

1) $BK = KC$, $\angle TAK = \varphi$ - искомый,
 O - центр $\triangle ABC$, $\angle TKO = \alpha$;

2) $\triangle TOK$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OT}{OK}$, $OT = OK \operatorname{tg} \alpha$;

3) $\triangle TOA$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OT}{OA} = \frac{OK \operatorname{tg} \alpha}{OA} = \frac{OK}{OA} \operatorname{tg} \alpha;$$

4) $OK : OA = 1 : 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$,

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) \text{ (рис. 117).}$$

$$29. \arctg\left(\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{17}\right); \arctg(4 \operatorname{tg} \alpha).$$

$$30. 2 \arcsin \frac{\sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}}{2}.$$

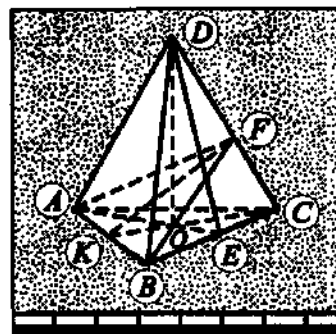


Рис. 118

Указание:

1) $AK = KB$, $KF \perp DC$, $BE = EC$,
 O - центр $\triangle ABC$, $\angle DEO = \alpha$, $BC = x$,
 $\angle AFB = \varphi$ - искомый (рис. 118);

2) $\triangle AEB$, $OE = \frac{AE}{3} = \frac{x}{2\sqrt{3}}$;

3) $\triangle DOE$, $ED = \frac{OE}{\cos \alpha} = \frac{x}{2\sqrt{3} \cos \alpha}$;

4) $\triangle DEB$,

$$BD = \sqrt{ED^2 + BE^2} = \frac{x\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}{2\sqrt{3} \cos \alpha};$$

$$5) \Delta FKB, BF = \frac{KB}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{x}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, S_{BDC} = \frac{ED \cdot BC}{2}, S_{BDC} = \frac{DC \cdot BF}{2};$$

$$6) ED \cdot BC = DC \cdot BF \Rightarrow 2 \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

$$31. \arccos(-\cos^2 \alpha). \quad 32. \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ дм.}$$

$$33. \frac{a^2}{12} \sqrt{3b^2 - a^2}, \frac{a^2}{4b} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

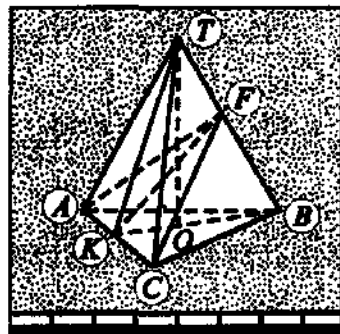


Рис. 119

Указание:

1) $AK = KC, KF \perp TB, AFC \perp TB, TB = b, AB = a, O$ — центр ΔABC (рис. 119);

$$2) \Delta BKC, BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$OB = \frac{2BK}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$3) \Delta TOB, TO = \sqrt{TB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}};$$

$$4) V = \frac{S_{ABC} \cdot TO}{3} = \frac{a^2}{12} \sqrt{3b^2 - a^2};$$

$$5) V = \frac{S_{AFC} \cdot TB}{3}, \text{ следовательно, } S_{AFC} = \frac{3V}{TB} = \frac{a^2}{4b} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

$$34. H \sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3}.$$

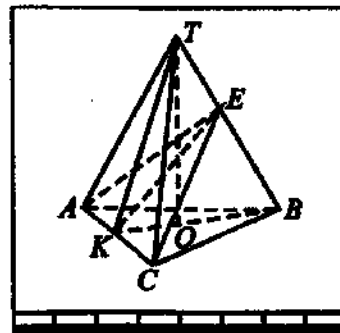


Рис. 120

Указание:

1) $AK = KC, KE \perp TB, \angle AEC = 2\alpha, TO \perp ABC, TO = H, BC = x$ (рис. 120);

$$2) \Delta EKC, KE = \frac{KC}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{x}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

$$3) \Delta BKC, BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

$$4) S_{TKB} = \frac{BK \cdot TO}{2} = \frac{x\sqrt{3}H}{4};$$

$$5) \Delta TOB, TB = \sqrt{TO^2 + OB^2} = \sqrt{H^2 + \frac{x^2}{3}};$$

$$6) S_{TKB} = \frac{KE \cdot TB}{2} = \frac{x\sqrt{3H^2 + x^2}}{4\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha};$$

$$7) \frac{x\sqrt{3}H}{4} = \frac{x\sqrt{3H^2 + x^2}}{4\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow x = H\sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3}.$$

$$35. \frac{2a \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \beta - 3}}. \quad 36. \frac{1}{6} \sqrt{5 + 1}.$$

$$37. \frac{a^3}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

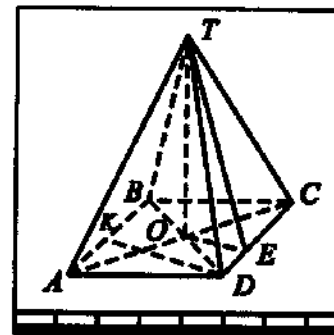


Рис. 121

Указание:

1) $AD = a, \angle BAD = \alpha, OE \perp DC, KD \parallel OE, \angle OET = \varphi$ (рис. 121);

$$2) OE = \frac{DK}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2};$$

$$3) \Delta TOE, TO = OE \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi;$$

$$4) S_{ABCD} = a^2 \sin \alpha;$$

$$5) V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TO = \frac{a^3}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

$$38. 54 \text{ см}^2.$$

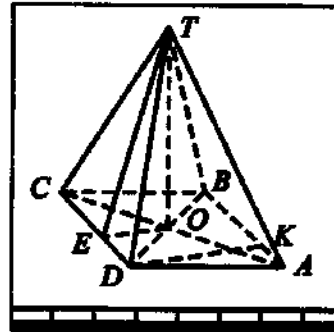


Рис. 122

Указание:

1) $OE \perp CD, DK \perp CD, \angle BAD = 30^\circ, AD = 6, \angle OET = 60^\circ$ (рис. 122);

$$2) \Delta DKA, DK = AD \sin 30^\circ = 3;$$

$$3) OE = \frac{DK}{2} = \frac{3}{2};$$

$$4) \Delta OET, TE = \frac{OE}{\cos 60^\circ} = 3;$$

$$5) S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 30^\circ = 18, \\ S_{бок} = 4S_{TDC} = 2DC \cdot TE = 36, \\ S_{полн} = S_{ABCD} + S_{бок} = 54.$$

39. 8 см^2 .

40. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{6}$.

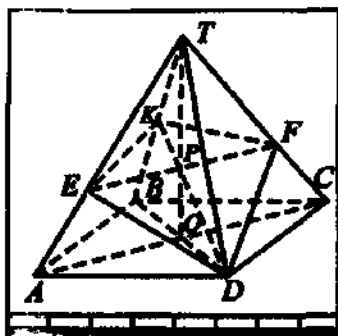


Рис. 123

Указание:

1) $BK = KT$, $KD \perp BT$, $P = OT \cap KD$,
 $P \in EF$, $EF \parallel AC$, $DEKF$ – искомое
сечение (рис. 123);

$$2) \triangle TKD, DK = \sqrt{TD^2 - TK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$TO = DK, TP = \frac{2TO}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

3) $\triangle ATC \sim \triangle ETF$, следовательно,

$$AC : EF = TO : TP = 3 : 2 \Rightarrow EF = \frac{2a}{3};$$

$$4) S_{DEKF} = \frac{DK \cdot EF}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6}.$$

41. $\frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$.

$$42. \frac{h^3 \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} - \frac{h^2}{4}}}{6\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}.$$

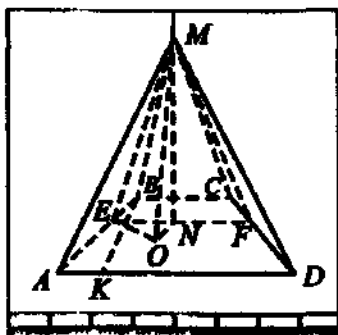


Рис. 124

Указание:

1) O – центр вписанной в $ABCD$ окружности, $MO \perp ABCD$, $BK \perp AD$,
 $BK = h$, $\angle EMF = \alpha$, $S_{EMF} = S$,

$$EO = \frac{BK}{2} = \frac{h}{2} \text{ (рис. 124);}$$

2) $\triangle MEF$,

$$2S = ME^2 \sin \alpha, ME = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}};$$

$$3) \triangle MOE, OM = \sqrt{ME^2 - EO^2} = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} - \frac{h^2}{4}};$$

$$4) \triangle EMN, EN = EM \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) \triangle ABK \sim \triangle ENO, AB : BK = EO : EN \Rightarrow$$

$$AB = \frac{h^2}{2EN} = \frac{h^2}{2\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}};$$

$$6) S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot BK}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot BK}{2} = \frac{2AB \cdot BK}{2} =$$

$$= AB \cdot BK = \frac{h^3}{2\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}};$$

$$7) V = S_{ABCD} \cdot \frac{MO}{3} = \frac{h^3 \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha} - \frac{h^2}{4}}}{6\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$43. \frac{a^3(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2(1 + \operatorname{tg} \alpha)}{3}.$$

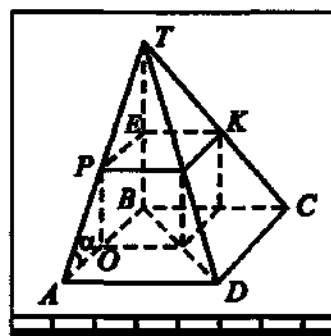


Рис. 125

Указание:

1) $PO = a$, $\angle TAB = \alpha$ (рис. 125);

$$2) \triangle AOP, AO = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$3) AB = AO + OB = a(1 + \operatorname{ctg} \alpha);$$

4) $\triangle ABT$,

$$TB = AB \operatorname{tg} \alpha = a(1 + \operatorname{ctg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$5) V = \frac{1}{3} S_a \cdot TB = \frac{a^3(1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2(1 + \operatorname{tg} \alpha)}{3}.$$

44. 84 см^2 .

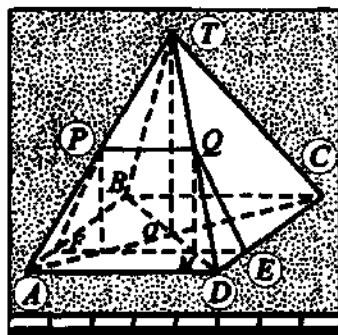


Рис. 126

Указание:

1) $TQ = QD$, $TP = PA$, $QM \parallel TO$,
 $EF \parallel AD$, $M \in EF$, $PQEF$ – трапеция, искомое сечение (рис. 126);

2) $BD = 16\sqrt{2}$, $TD = 18$, $\triangle BCD$,
 $DC = x$, $BD^2 = 2x^2$, $x = 16$;

3) $PQ = \frac{AD}{2}$, $EF = AD = 16$;

4) $\triangle TOD$,

$$TO = \sqrt{TD^2 - OD^2} = 14, MQ = \frac{TO}{2} = 7;$$

$$5) S_{PQEF} = \frac{(PQ + EF) \cdot MQ}{2} = 84.$$

45. 45 см^2 .

46. 1.

47. 3 : 5.

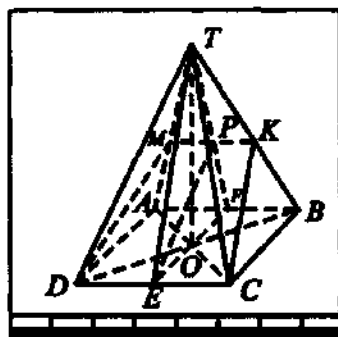


Рис. 127

Указание:

1) $DMKC$ – сечение (трапеция), F , E – середины сторон AB и CD , O – центр квадрата $ABCD$, $\angle OTF = 30^\circ$;
 2) $TF = TE$, $\angle ETF = 60^\circ \Rightarrow \triangle ETF$ – равносторонний (рис. 127);

3) $AB = AD = EF = x$, $MK = \frac{x}{2}$,

$$PE = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

$$4) TP \perp DMKC, V_{TDMKC} = \frac{TP \cdot S_{DMKC}}{3}, TP = \frac{x}{2},$$

$$S_{DMKC} = \frac{(MK + DC)PE}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}, V_{TMDCK} = \frac{x^2\sqrt{3}}{16};$$

$$5) V_{TABCD} = \frac{S_{ABCD} \cdot TO}{3} = \frac{x^3\sqrt{3}}{6};$$

$$6) V_{TCDMK} : V_{ABCDMK} = V_{TCDMK} : (V_{TABCD} - V_{TCDMK}) = 3 : 5.$$

$$48. \frac{a^3\sqrt{3}}{48 \cos \alpha}, \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{48}.$$

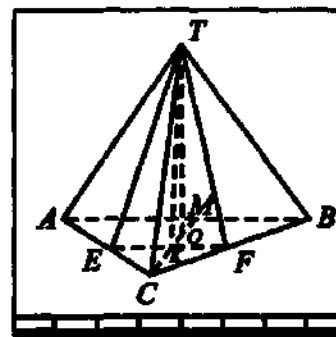


Рис. 128

Указание:

1) O – центр $\triangle ABC$, $AE = EC$, $CF = FB$,
 $K = CO \cap EF$, $\angle TKO = \alpha$ (рис. 128);

2) $\triangle CMB$, $CM = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

3) $OK = CO - CK = \frac{2}{3}CM - \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{12}$;

4) $\triangle TOK$, $TO = OK \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{12}$,

$$TK = \frac{OK}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{12 \cos \alpha};$$

$$5) S_{ETF} = \frac{1}{2}EF \cdot TK = \frac{a^2\sqrt{3}}{48 \cos \alpha}, V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot TO = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{48}.$$

$$49. \frac{a^2\sqrt{6}}{9}.$$

$$50. \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right), \arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

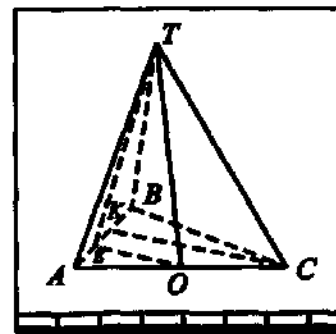


Рис. 129

Указание:

1) $AO = OC$, $OE \perp AB$, $TO \perp ABC$,
 $\angle TEO = \alpha$, $\angle TBO = \varphi$, $\angle TCO =$
 $= \angle TAO = \gamma$, $AC = a$ (рис. 129);

2) $\triangle AOE$, $\angle EAO = 60^\circ$,

$$OE = AO \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$

$$3) \triangle EOT, OT = OE \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{4};$$

$$4) \triangle AOT, \operatorname{tg} \gamma = \frac{OT}{AO} = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha \right);$$

$$5) \triangle AOB, OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$6) \triangle TOB, \operatorname{tg} \varphi = \frac{OT}{OB} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}, \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

$$51. \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

$$52. \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

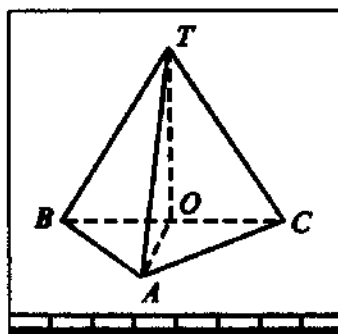


Рис. 130

Указание:

$$1) TB = TA = TC = b, \angle BTC = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle BTA = \angle ATC = \frac{\pi}{3} \text{ (рис. 130);}$$

$$2) \triangle BTA, BA = b, \triangle ATC, AC = b;$$

$$3) \triangle BTC, BC = \sqrt{BT^2 + TC^2} = b\sqrt{2};$$

$$4) \triangle BAC - \text{прямоугольный,}$$

$$\angle BAC = 90^\circ, \text{ т. к. } BC^2 = BA^2 + AC^2;$$

$$5) TO \perp (ABC), O - \text{середина гипотенузы } BC, \text{ следовательно,}$$

$$TO = \sqrt{TC^2 - OC^2} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

$$53. \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{12V}{c^3}}.$$

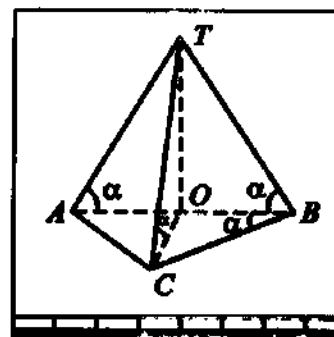


Рис. 131

Указание:

$$1) AO = OB, AB = c, TO \perp (ABC), \angle TCO = \angle ABC = \alpha - \text{искомый (рис. 131);}$$

$$2) \triangle TBO, TO = OB \operatorname{tg} \alpha = \frac{c \operatorname{tg} \alpha}{2};$$

$$3) \triangle ABC, AC = AB \sin \alpha = c \sin \alpha, \\ BC = AB \cos \alpha = c \cos \alpha;$$

$$4) V = \frac{S_{ABC} \cdot TO}{3} = \frac{c^3 \sin^2 \alpha}{12},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{12V}{c^3}, \alpha = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{12V}{c^3}}.$$

$$54. \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$55. \frac{4\sqrt{3}}{9} H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

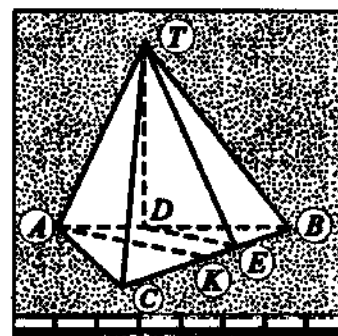


Рис. 132

Указание:

$$1) AD = DB, TD \perp (ABC), DE \perp BC, \\ TD = H, \angle TED = \alpha, BC = x \text{ (рис. 132);}$$

$$2) \triangle TDE, DE = DT \operatorname{ctg} \alpha = H \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \triangle ABC, S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4},$$

$$S_{ABC} = DE \cdot BC = xH \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = xH \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow x = \frac{4H \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}},$$

$$S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{3} H^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$4) V = \frac{S_{ABC} \cdot H}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9} H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

56. $\frac{2\sqrt{3}}{27}(l^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - l^2}$.

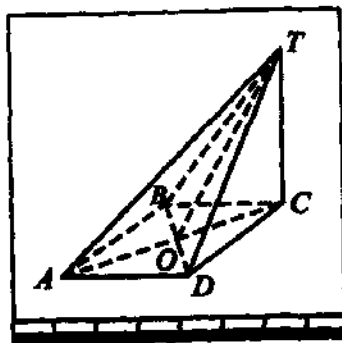


Рис. 133

Указание:

1) $TC \perp (BCD)$, $TA = l$, $TO = b$ (рис. 133);

2) $OC = x$, $\triangle TCO$, $TC^2 = TO^2 - OC^2 = b^2 - x^2$, $AC = 2OC = 2x$,
 $\triangle TCA$, $TC^2 = AT^2 - AC^2 = l^2 - 4x^2$,
 $b^2 - x^2 = l^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{\sqrt{3}}$;

3) $\triangle TCO$,

$$TC = \sqrt{TO^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - l^2}}{\sqrt{3}};$$

4) $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \sin 90^\circ}{2} = \frac{2(l^2 - b^2)}{3}$;

5) $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot TC = \frac{2\sqrt{3}}{27}(l^2 - b^2)\sqrt{4b^2 - l^2}$.

57. $65\sqrt{3} \text{ см}^3$.

58. $\frac{a^3}{6}$.

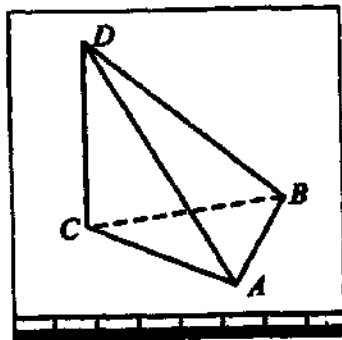


Рис. 134

Указание:

1) $\angle DCB = \angle DCA = \angle BCA = 90^\circ$,
 $CD = CA = CB = a$ (рис. 134);

2) $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DC$;

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{a^2}{2}$;

4) $V = \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} a = \frac{a^3}{6}$.

59. 8 см.

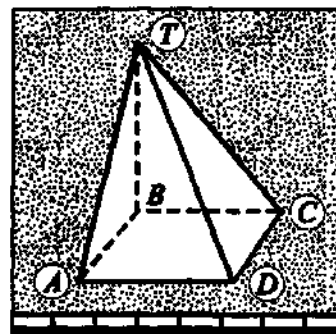


Рис. 135

Указание:

1) $TB \perp (ABCD)$, $TA \perp AD$, $TC \perp DC$,
 $AB = 15$, $r = 3$, $TB = x$ (рис. 135);

2) $V_{TABCD} = \frac{S_{ABCD} \cdot TB}{3} = 75x$;

3) $V_{TABCD} = \frac{r S_{\text{полн}}}{3}$,

$$S_{\text{полн}} = 2S_{ABT} + 2S_{TAD} + S_{ABCD}$$

$$2S_{ABT} = AB \cdot BT = 15x,$$

$$2S_{ATD} = AD \cdot TA = 15\sqrt{x^2 + 15^2}, S_{ABCD} = 225;$$

4) $75x = 15x + 15\sqrt{x^2 + 15^2} + 225$, $TB = 8$.

60. $\frac{16}{\sqrt{3}} \text{ см}^3$.

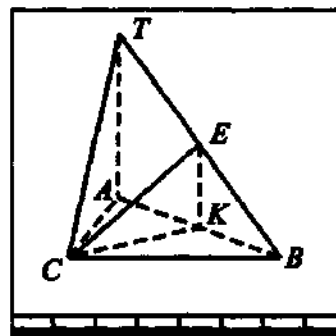


Рис. 136

Указание:

1) $TA \perp (ABC)$, $BE = ET$, $EK \parallel TA$,
 $\angle CEK = 60^\circ$, $AK = 2$ (рис. 136);2) $AB = 2AK = 4$,

$$S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3};$$

3) $\triangle BKC$, $\angle BKC = 90^\circ$,

$$CK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 2\sqrt{3};$$

4) $\triangle CKE$, $\angle CKE = 90^\circ$,

$$EK = CK \operatorname{ctg} 60^\circ = 2;$$

5) $TA = 2EK = 4$, $V = \frac{S_{ABC} \cdot TA}{3} = \frac{16}{\sqrt{3}}$.

61. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

62. $-4R^2 \sin 4\alpha$.

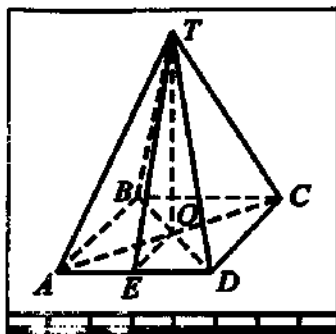


Рис. 137

Указание:

1) $TO \perp (ABC)$, $AE = ED$, R — радиус шара, $\angle TAE = \alpha$, $AD = x$ (рис. 137);

2) $\triangle AET$, $TE = AE \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \alpha$;

3) $\triangle EOT$,

$$TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \frac{x\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}{2 \cos \alpha};$$

$$4) R = \frac{AT \cdot TC \cdot AC}{4S_{ATC}} = \frac{AT^2}{2OT} =$$

$$= \frac{x}{4 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}}, \quad x = 4R \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha};$$

$$5) S_{бок} = 4S_{ATD} = 2AD \cdot TE = 16R^2 \cos \alpha \sin \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = -4R^2 \sin 4\alpha.$$

63. $\frac{4R\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}$.

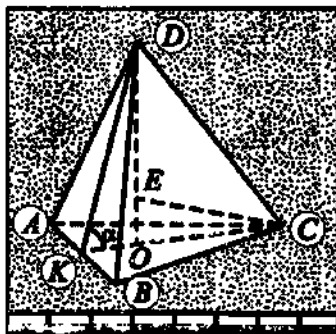


Рис. 138

Указание:

1) $AK = KB$, O — центр $\triangle ABC$, $\angle DKC = \alpha$, E — центр шара, R — радиус шара, $BC = x$ (рис. 138);

2) $\triangle CKB$,

$$KC = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad OK = \frac{KC}{3} = \frac{x}{2\sqrt{3}};$$

3) $\triangle DOK$, $DO = OK \operatorname{tg} \alpha = \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2\sqrt{3}}$,

$$DO = DE + OE = R + OE;$$

$$4) \triangle EOC, \quad OE = \sqrt{EC^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{3}};$$

$$5) \frac{x \operatorname{tg} \alpha}{2\sqrt{3}} = R + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{3}}, \quad BC = \frac{4R\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4}.$$

64. $\frac{4}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha}$.

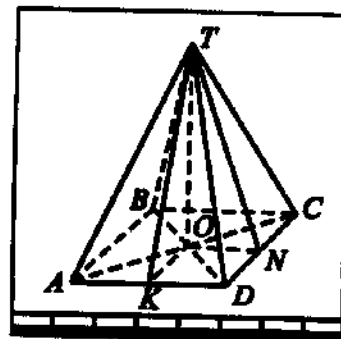


Рис. 139

Указание:

1) $TD = a$, $DK = KA$, $DN = NC$, $\angle TDN = \alpha$, $\angle TDK = \beta$ (рис. 139);

2) $\triangle TKD$,

$$TK = TD \sin \beta = a \sin \beta, \quad KD = a \cos \beta;$$

3) $\triangle TND$, $ND = a \cos \alpha$, $OK = DN$;

4) $\triangle TOK$,

$$TO = \sqrt{TK^2 - OK^2} = a \sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha};$$

5) $AD = 2a \cos \beta$, $DC = 2a \cos \alpha$;

$$6) V = \frac{1}{3} AD \cdot DC \cdot TO = \frac{4}{3} a^3 \cos \alpha \cos \beta \sqrt{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha}.$$

65. 54 см^3 .

66. $8a^2 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

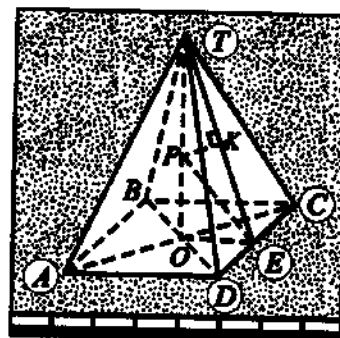


Рис. 140

Указание:

1) P — центр шара, $DE = EC$, $PK \perp TE$, $PO = PK = R$ — радиус шара, $\angle OET = \alpha$, $PT = a$ (рис. 140);

2) $\triangle TKP$,

$$\angle TPK = \angle OET = \alpha, \quad PK = a \cos \alpha;$$

3) $\triangle POE$, $OE = OP \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a \cos \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

$$4) \triangle TOE, \quad TE = \frac{OE}{\cos \alpha} = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$5) S_{ABCD} = DC^2 = 4a^2 \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$6) S_{бок} = 4S_{TDC} = 2DC \cdot TE = 4a^2 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$7) S_{полн} = S_{ABCD} + S_{бок} = 8a^2 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$67. \alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$68. \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

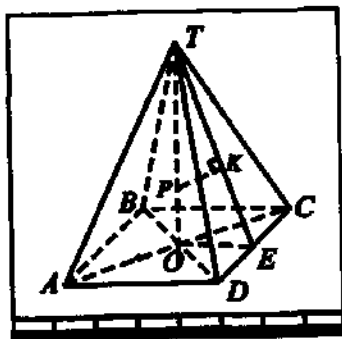


Рис. 141

Указание:

1) P – центр вписанного шара, O – центр основания $ABCD$, $DE = EC$, $PK \perp TE$, $\angle DTC = \alpha$, R – радиус шара, $PO = PK = R$, $DC = a$ (рис. 141);

2) $\triangle DET$, $TE = DE \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

3) $\triangle TOE$, $TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;

$$4) TP = TO - R = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - R;$$

5) $\triangle TOE \sim \triangle TKP$, следовательно, $OE : PK = TE : (TO - R)$,

$$R = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$69. \frac{3\pi}{32}.$$

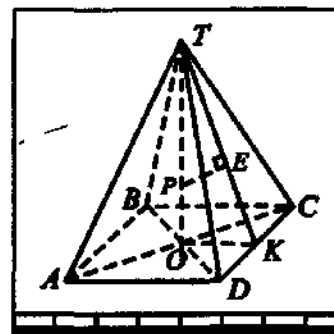


Рис. 142

Указание:

1) O – центр основания, TO – высота пирамиды, $DK = KC$, $PE \perp TK$, $PO = PE = R$ – радиус вписанного шара, P – центр вписанного шара, $TO = H$, $H = 8R$, $AD = x$ (рис. 142);

2) $\triangle TEP \sim \triangle TOK$, $OK : R = TK : TP$,

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4} + H^2}}{7R}, x = \frac{H}{2\sqrt{3}} = \frac{4R}{\sqrt{3}};$$

$$3) V_{\text{мпр}} = \frac{S_{ABCD} \cdot OT}{3} = \frac{AD^2 \cdot OT}{3} = \frac{128R^3}{9};$$

$$4) V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3, V_{\text{ш}} : V_{\text{мпр}} = \frac{3\pi}{32}.$$

$$70. \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{8}.$$

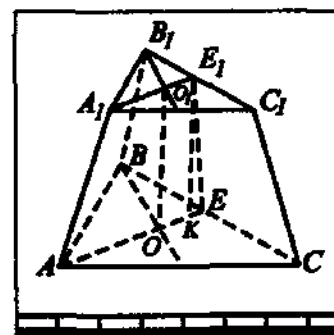


Рис. 143

Указание:

1) $AC = a$, $A_1C_1 = b$, $BE = EC$, $B_1E_1 = E_1C_1$, $\angle E_1EA = \alpha$, $OO_1 = h$ (рис. 143);

2) $V = h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, $S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{A_1B_1C_1}$;

$$3) OE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$4) O_1E_1 = \frac{A_1E_1}{3} = \frac{b\sqrt{3}}{6}, KE = \sqrt{3} \frac{a-b}{6};$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{KE}, h = \frac{\sqrt{3}(a-b) \operatorname{tg} \alpha}{6};$$

$$6) S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, S_2 = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}, V = \frac{(a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha}{8}.$$

71. 160 см^2 .

72. $\frac{ab^2 \operatorname{tg} \alpha}{12}$.

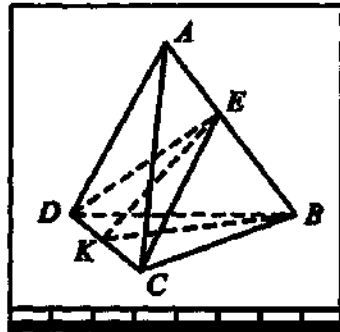


Рис. 144

Указание:

- 1) Пусть $DCE \perp AB \Rightarrow DCE \perp ACB$,
 $DCE \perp DAB$, $\angle EDC = \angle ECD = \alpha$
 (рис. 144);
- 2) $DK = KC$, $\triangle DEC$ – равнобедренный,
 значит, $KE \perp DC$;

3) $\triangle EKC$, $KE = KC \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha$;

4) $S_{DEC} = \frac{DC \cdot KE}{2} = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$;

5) $V_{ABCD} = V_{ADCE} + V_{BCDE} = \frac{S_{DEC} \cdot AE}{3} + \frac{S_{DEC} \cdot BE}{3} =$
 $= \frac{S_{DEC} \cdot AB}{3} = \frac{ab^2 \operatorname{tg} \alpha}{12}$.

4

Цилиндр



4. ЦИЛИНДР

4.1. Формулы, задачи

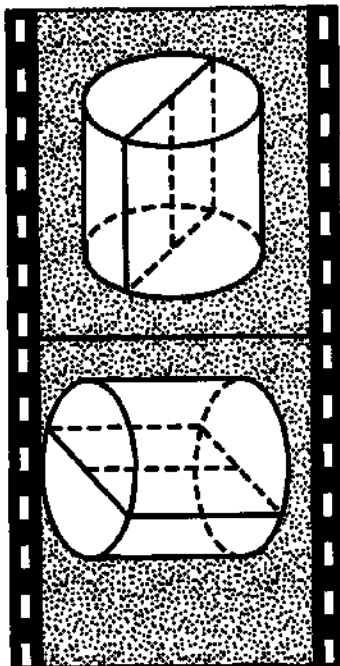


Рис. 145

1. Цилиндр (R – радиус основания; H – высота; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности; V – объем).

$$1) S_{бок} = 2\pi RH;$$

$$2) S_{полн} = 2\pi RH + 2\pi R^2;$$

$$3) V = \pi R^2 H.$$

2. Цилиндр, описанный около призмы. Для того, чтобы около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать окружность.

3. Цилиндр, вписанный в призму. Для того, чтобы в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и

достаточно, чтобы призма была прямой и в основание ее можно было вписать окружность.

4. Сфера, описанная около цилиндра. Около любого цилиндра можно описать сферу.

5. Сфера, вписанная в цилиндр. Для того, чтобы в цилиндр можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы его высота равнялась диаметру основания.

Задача 1. Определите высоту цилиндра, в котором диагональ сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее, в два раза больше радиуса основания цилиндра.

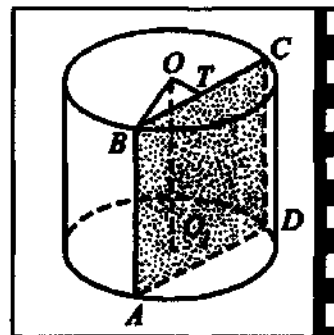


Рис. 146

Решение. Пусть $ABCD$ – сечение цилиндра, параллельное его оси OO_1 , $OB = R$, точка T – середина отрезка BC , а высота цилиндра – x . Тогда $CD = x$, $BD = 2R$, $OT = 4$ см. В прямоугольном треугольнике BCD катет $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. В треугольнике BTO ($\angle BTO = 90^\circ$) катет $BT = \sqrt{OB^2 - OT^2} = \sqrt{R^2 - 16}$.

Так как $BC = 2BT$, то $\sqrt{4R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2 - 16}$. Отсюда находим $x = 8$. Высота цилиндра равна 8 см (рис. 146).

Задача 2. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, периметры которых равны 36 см и 50 см, а разность их площадей равна 70 см^2 . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

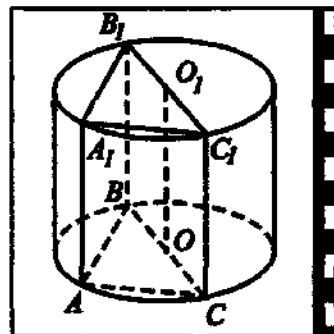


Рис. 147

Решение. Пусть AA_1B_1B и AA_1C_1C взаимно перпендикулярные сечения, $P_{AA_1B_1B} = 36$ см, $P_{AA_1C_1C} = 50$ см, $S_{AA_1C_1C} - S_{AA_1B_1B} = 70 \text{ см}^2$ (рис. 147). Обозначим длину отрезка AB через x . Тогда $AA_1 = 18 - x$, $AC_1 = 25 - (18 - x) = 7 + x$. По условию $(18 - x)(7 + x) - x(18 - x) = 70$. Из этого уравнения находим $x = 8$. Следовательно, $AA_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см.

В прямоугольном треугольнике BAC ($\angle BAC = 90^\circ$) гипотенуза $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 17$ см.

Значит, площадь $S_{BB_1C_1C} = BC \cdot CC_1 = 17 \cdot 10 = 170 \text{ см}^2$.

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра составляет половину его полной поверхности. Определите полную поверхность цилиндра, если диагональ осевого сечения равна a .

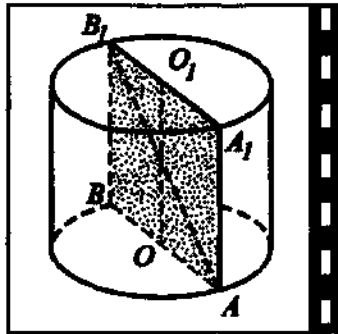


Рис. 148

Решение. По условию задачи $2S_{\text{бок}} = S_{\text{полн}}$, т. е. $4\pi RH = 2\pi R(R + H)$. Отсюда следует, что $R = H$. Пусть ABB_1A_1 – осевое сечение. В прямоугольном треугольнике ABB_1 ($\angle ABB_1 = 90^\circ$, $AB = 2R$, $BB_1 = R$) $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$, $a^2 = 4R^2 + R^2$.

Следовательно, $R = \frac{a^2}{\sqrt{5}}$. Полная поверхность цилиндра $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + H) = 2\pi \frac{a^2}{\sqrt{5}} (\frac{a^2}{\sqrt{5}} + \frac{a^2}{\sqrt{5}}) = \frac{4\pi a^2}{5}$ (рис. 148).

Задача 4. В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида. Найдите объем цилиндра, если известно, что длина стороны основания пирамиды равна b , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ .

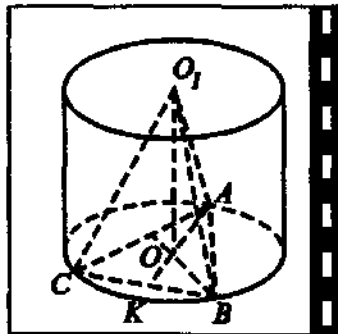


Рис. 149

Решение. Так как пирамида O_1ABC правильная, то ее высота совпадает с осью OO_1 цилиндра. По условию $AC = CB = BA = b$, $\angle O_1AO = \varphi$. Пусть $AK \perp BC$. В прямоугольном треугольнике AKC ($\angle CKA = 90^\circ$, $CK = \frac{b}{2}$, $AC = b$) катет

$$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}. \text{ Точка } O -$$

центр треугольника ABC , следовательно, $AO = \frac{2}{3}AK = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Из прямоугольного треугольника AOO_1 находим $OO_1 = AO \operatorname{tg} \varphi = \frac{b \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, объем цилиндра $V = \pi OA^2 \cdot OO_1 = \frac{\pi b^3 \operatorname{tg} \varphi}{3\sqrt{3}}$ (рис. 149).

Задача 5. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник $ABCD$, в котором диагональ AC равна a и составляет угол α с основанием AD . Определите объем цилиндра, образующая которого равна AB .

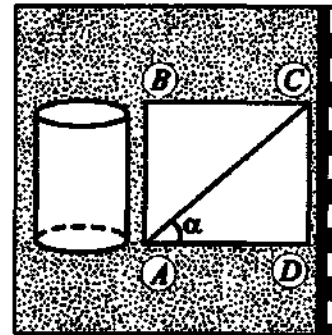


Рис. 150

Решение. Пусть прямоугольник $ABCD$ – развертка цилиндра, $AC = a$, $\angle CAD = \alpha$. Основание прямоугольника $AD = 2\pi R$. В прямоугольном треугольнике ADC катет $AD = AC \cos \alpha = a \cos \alpha$. Из равенства $2\pi R = a \cos \alpha$ находим радиус основания $R = \frac{a \cos \alpha}{2\pi}$. Высота H цилиндра равна стороне $CD = a \sin \alpha$. Таким образом, объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H = \frac{a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{4\pi} \text{ (рис. 150).}$$

Задача 6. В цилиндр вписана призма $ABC A_1 B_1 C_1$, основанием которой служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите объем цилиндра, если площади равных боковых граней призмы равны S , а площадь ее сечения $BA_1 C_1$ равна Q .

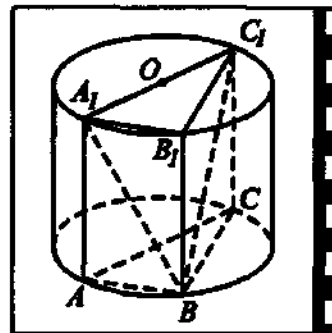


Рис. 151

Решение. Пусть $\angle A_1 B_1 C_1 = 90^\circ$, $A_1 B_1 = B_1 C_1 = x$, $BB_1 = H$ (рис. 151). В треугольной пирамиде $B_1 A_1 C_1 B$ плоские углы при вершине B_1 прямые, следовательно, $S^2_{AB_1C_1} = S^2_{A_1 B_1 B} + S^2_{B_1 C_1 B} + S^2_{A_1 B_1 C_1}$ или $Q^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2$. Отсюда находим $x^4 = 4Q^2 - 2S^2$. В прямоугольном

треугольнике $A_1B_1C_1$ гипотенуза $A_1C_1 = 2R$, следовательно, $4R^2 = 2x^2$,

$$R^2 = \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2}. \text{ Площадь } S = xH. \text{ Отсюда } H = \frac{S}{x} =$$

$$= \frac{S}{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}. \text{ Теперь находим объем цилиндра } V = \pi R^2 H =$$

$$= \pi \frac{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2} \cdot \frac{S}{\sqrt{4Q^2 - 2S^2}} = \frac{\pi S \sqrt{4Q^2 - 2S^2}}{2\sqrt{4Q^2 - 2S^2}} = \frac{1}{2} \pi S \sqrt{4Q^2 - 2S^2}.$$

Задача 7. Высота цилиндра 12 см, а радиус основания 10 см. Отрезок длиной 20 см расположен так, что его концы лежат на окружностях обоих оснований. Найдите расстояние от этого отрезка до оси цилиндра.

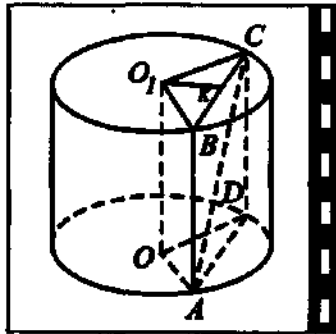


Рис. 152

Решение. Через данный отрезок AC , длина которого равна 20 см, проведем плоскость $ABCD$, параллельную оси цилиндра OO_1 (рис. 152). Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми OO_1 и AC будет равно длине отрезка O_1K ($O_1K \perp BC$), т. е. расстоянию от прямой OO_1 до плоскости $ABCD$. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC =$

$= \sqrt{AC^2 - AB^2} = 16$ см, $BK = 8$ см, $O_1B = 10$ см. Из прямоугольного треугольника O_1KB находим $O_1K = \sqrt{O_1B^2 - BK^2} = 6$ см.

Задача 8. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена секущая плоскость, которая от окружности основания отсекает дугу α . Площадь сечения равна S . Найдите объем цилиндра.

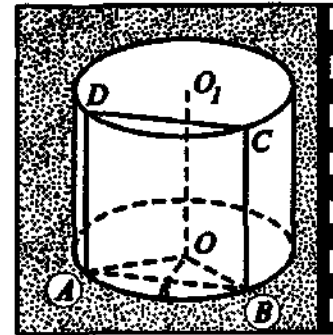


Рис. 153

Решение. Пусть точка O – центр основания цилиндра, $ABCD$ – сечение, точка E – середина отрезка AB . Тогда $\angle AOB = \alpha$, $OE = a$, $S_{ABCD} = S$, $AO = R$, $AD = H$. В прямоугольном треугольнике AEO гипотенуза $AO = \frac{OE}{\cos \frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \text{ а катет } AE = OE \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь сечения $S = AB \cdot AD = \left(2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) H$. Отсюда находим

$$H = \frac{S}{2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Объем цилиндра } V = \pi R^2 H = \pi \frac{a^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a S}{\sin \alpha} \text{ (рис. 153).}$$

4.2. Задачи.

1. Высота цилиндра равна h . В развертке $ABCD$ его боковой поверхности образующая CD составляет с диагональю BD развертки угол α . Определите объем цилиндра.
2. Из квадрата, диагональ которого равна d , свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите объем цилиндра.
3. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна S , а площадь полной поверхности равна Q . Найдите объем цилиндра.
4. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна M , а площадь осевого сечения равна N . Определите поверхность и объем цилиндра.

5. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q , угол между диагональю сечения и плоскостью основания равен α . Найдите объем цилиндра.
6. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 120π , а боковая поверхность равна 60π .
7. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.
8. Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?
9. В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу, равную 2α . Диагональ образованного сечения наклонена к плоскости основания под углом β . Найдите объем цилиндра, если площадь сечения равна S .
10. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m : n$. Площадь сечения равна S . Найдите боковую поверхность цилиндра.
11. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии a от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α . Площадь сечения равна S . Определите объем цилиндра.
12. Радиус основания цилиндра равен 26 см, длина образующей – 48 см. На каком расстоянии от оси цилиндра следует провести сечение, параллельное оси цилиндра, чтобы оно имело форму квадрата?
13. Точка окружности верхнего основания цилиндра соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен α . Найдите угол между данной прямой и осью цилиндра, если известно, что высота цилиндра равна его диаметру.
14. Дан прямой цилиндр с радиусом основания, равным r . Точка A , лежащая на окружности верхнего основания, соединена

- прямой с точкой B на окружности нижнего основания. Длина дуги $A'B$ (где A' – проекция точки A на основание) равна l . Найдите площадь треугольника ABQ , где Q – середина оси цилиндра, а длина этой оси равна h .
15. В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α . Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b , а диагональ большей боковой грани равна l .
 16. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого одна из сторон основания равна b . Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α , а с боковой гранью, проходящей через данную сторону основания, – угол β . Определите боковую поверхность цилиндра.
 17. В цилиндр вписана правильная n -угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра.
 18. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы, соответственно равные α и β . Найдите отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.
 19. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Диагональ призмы образует с боковой гранью угол α , высота призмы равна h . Найдите боковую поверхность цилиндра.
 20. В цилиндр вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите угол между осью цилиндра и боковой гранью пирамиды, если известно, что боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом φ .
 21. В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен $\frac{15}{2}$.

22. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанного в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.
23. Найдите отношение объема шара к объему прямого кругового цилиндра, вписанного в этот шар, если известно, что меньший угол между диагоналями осевого сечения цилиндра равен α , а диаметр основания больше высоты цилиндра.
24. Внутри цилиндра высотой $3a$ помещено три одинаковых шара радиуса a так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания, а третий – верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.
25. Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ .
26. Через образующую цилиндра проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Площадь каждого из полученных сечений равна S . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.
27. В конус вписан цилиндр, диагонали осевого сечения которого параллельны образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания конуса угол α . Найдите объем цилиндра.
28. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Площадь полной поверхности цилиндра равна площади основания конуса. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.
29. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, если известно, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как $3 : 2$.
30. В прямой конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник, вписан цилиндр (нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса). Отношение пло-

- щади боковой поверхности конуса к площади боковой поверхности цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найдите величину угла между плоскостью основания конуса и прямой, проходящей через центр верхнего основания цилиндра и произвольную точку окружности основания конуса.
31. Конус расположен так, что его основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина лежит в центре другого основания цилиндра. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем конуса равен V , а его образующая составляет с осью цилиндра угол α .
 32. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как $7 : 4$?
 33. В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса равна S .
 34. На основаниях цилиндра построены два конуса с вершинами в середине оси цилиндра. Найдите объем цилиндра, если сумма объемов конусов равна $\frac{2\pi a^3}{3}$ и образующая каждого конуса наклонена к плоскости основания под углом 45° .
 35. Найдите радиус основания R и высоту H цилиндра, имеющего при данном объеме $V = 16\pi$ наименьшую полную поверхность.
 36. Найдите отношение высоты к радиусу основания цилиндра, который при заданном объеме имеет наименьшую полную поверхность.
 37. Около цилиндра, радиус основания которого равен r , а высота – h , опишите конус наименьшего объема, если плоскость

основания цилиндра и плоскость основания конуса совпадают. Определите объем этого конуса.

38. Цилиндр, высота которого равна h , а радиус основания — r , вписан в конус. Найдите величину угла при вершине осевого сечения, при которой объем конуса будет наименьшим.
39. В конус вписан цилиндр так, что основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое основание совпадает с сечением конуса плоскостью. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.
40. Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса — правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.
41. Высота цилиндра равна высоте конуса. Боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса как $3 : 2$. Кроме того, известно, что угол, составленный образующей конуса с плоскостью основания, равен α . Найдите отношение объема цилиндра к объему конуса.
42. В шар радиуса R вписан конус, в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найдите полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α .
43. Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара как $m : n$. Найдите отношение их объемов.
44. Даны шар, цилиндр с квадратным сечением и конус. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания, а их высоты равны диаметру шара. Как относятся объемы цилиндра, шара и конуса?
45. Около куба описан цилиндр так, что концы диагонали куба находятся в центрах оснований цилиндра, а его остальные вершины — на боковой поверхности цилиндра. Найдите полную поверхность цилиндра, если площадь диагонального сечения куба равна S .

46. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, диагональ которой составляет угол α с каждой из параллельных сторон. Боковая поверхность призмы равна Q . Определите боковую поверхность цилиндра, вписанного в эту призму.
47. Отрезок, соединяющий диаметрально противоположные точки A и K верхнего и нижнего оснований цилиндра, равен a и наклонен к плоскости основания под углом α . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
48. Треугольник ABC^1 (вершины A и B — концы диаметра нижнего основания, C^1 — конец перпендикулярного к нему диаметра верхнего основания цилиндра) — равносторонний со стороной a . Найдите площади боковой и полной поверхностей цилиндра.
49. На одном основании построены конус и равновеликий ему цилиндр. Через середину высоты цилиндра проведена плоскость, параллельная основанию. Как относятся площади полученных сечений цилиндра и конуса?
50. В основании цилиндра проведена хорда, равная стороне правильного шестиугольника, вписанного в это основание. Если соединить концы хорды с центром другого основания, то получится треугольник, площадь которого равна Q , а угол при вершине равен α . Вычислите объем данного цилиндра.
51. Докажите, что если боковая поверхность цилиндра равна площади его основания, то радиус основания цилиндра в два раза больше его высоты.
52. Во сколько раз боковая поверхность цилиндра больше площади его осевого сечения?
53. Объем цилиндра равен 400π , а площадь его осевого сечения равна 80. Определите полную поверхность цилиндра.
54. Угол между образующей цилиндра и диагональю осевого сечения, содержащего эту образующую равен α , площадь основания равна S . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

55. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α , обращенным к основаниям. Найдите высоту цилиндра, если его объем равен V .
56. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна m и составляет с основанием угол α . Найдите объем цилиндра.
57. Полная поверхность цилиндра равна 192π см², а высота его на 4 см больше радиуса основания. Определите радиус основания и высоту цилиндра.
58. Высота цилиндра на 4 см больше радиуса его основания, а боковая поверхность равна 120π см². Определите объем цилиндра.
59. Если в равностороннем цилиндре радиус основания увеличить на 2, а высоту уменьшить на 3, то боковая поверхность цилиндра останется прежней. Определите, как изменится при этом объем цилиндра.
60. Если высоту цилиндра оставить без изменения, а радиус основания увеличить в два раза, то боковая поверхность цилиндра увеличится на 8π , а объем – на 12π . Определите первоначальные размеры цилиндра.
61. Боковая поверхность цилиндра равна 120π , а радиус основания равен 4. Найдите боковую поверхность такого равностороннего цилиндра, диаметр основания которого равен диагонали осевого сечения данного цилиндра.
62. Радиусы оснований двух равновеликих цилиндров – 30 см и 18 см, а полная поверхность первого цилиндра равна боковой поверхности второго. Определите высоты этих цилиндров.
63. Полная поверхность цилиндра равна 456π , а высота – 7. Определите диагональ осевого сечения цилиндра.
64. Определите размеры цилиндра, полная поверхность которого относится к его боковой поверхности как 5 : 3, а периметр осевого сечения равен 42.

65. По оси цилиндра, радиус основания которого равен 7 см, а высота – 20 см, просверлили сквозное отверстие цилиндрической формы с радиусом основания 2 см. Определите объем и полную поверхность полученной детали.
66. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a .
67. Определите высоту цилиндра, в котором диагональ сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 дм от нее, в два раза больше радиуса основания цилиндра.
68. В цилиндре, радиус основания которого равен 6 дм, а высота равна 4 дм, дуга AB между образующими AA_1 и BB_1 содержит 120° . Вычислите кратчайшее расстояние по поверхности цилиндра между точками A и B_1 .
69. Если в равностороннем цилиндре радиус основания увеличить на 2 см, а высоту цилиндра уменьшить на 2 см, то полная поверхность цилиндра увеличится на 96π см². Определите радиус цилиндра.
70. Радиус основания цилиндра равен 12 см, а высота 6 см. На сколько нужно уменьшить радиус основания, не изменяя высоты цилиндра, чтобы полная поверхность цилиндра уменьшилась на 208π см²?
71. Определите радиус основания и образующую цилиндра, полная поверхность которого равна 130π см², а периметр осевого сечения равен 36 см.
72. Полная поверхность цилиндра равна 320π см², а площадь осевого сечения – 192 см². Определите объем цилиндра.
73. Боковые поверхности двух цилиндров, имеющих равные радиусы оснований, относятся как 5 : 9. Диагонали осевых сечений этих цилиндров равны 13 см и 15 см. Определите высоты цилиндров.
74. Полная поверхность равностороннего цилиндра равна полной поверхности другого цилиндра, площадь осевого сечения ко-

- торого равна 78 дм^2 , а радиус основания на 1 дм меньше радиуса основания первого цилиндра. Определите высоту второго цилиндра.
- 75.** Определите высоту цилиндра, боковая поверхность которого равна $80\pi \text{ см}^2$, а диагональ сечения, параллельного оси цилиндра и удаленного от нее на 4 см, равна 10 см.
- 76.** Определите радиус цилиндра, полная поверхность которого равна $110\pi \text{ см}^2$, а сечение цилиндра, параллельное его оси и удаленное от нее на 4 см, является квадратом.
- 77.** Через образующую цилиндра проведены два сечения, плоскости которых образуют двугранный угол в 60° . Определите боковую поверхность цилиндра, если площади сечений равны 22 см^2 и 26 см^2 .
- 78.** Сечение, проведенное через образующую цилиндра, делит окружность его основания в отношении 1 : 5. Полная поверхность цилиндра равна $168\pi \text{ см}^2$, а периметр сечения равен 28 см. Определите диагональ сечения.
- 79.** В цилиндр помещен равнобедренный треугольник так, что вершины его углов при основании лежат на окружности одного основания, а третья вершина – на окружности другого основания цилиндра. Основание треугольника равно 32 см, а площадь – 640 см^2 . Определите высоту цилиндра, если плоскость треугольника делит ось цилиндра в отношении 3 : 5.
- 80.** В цилиндр вписан равносторонний треугольник так, что его вершины лежат на окружностях оснований цилиндра, а плоскость треугольника делит ось цилиндра в отношении 5 : 13. Сторона треугольника равна 12 см. Определите боковую поверхность цилиндра.
- 81.** Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, периметры которых равны 36 см и 50 см, а разность их площадей равна 70 см^2 . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

- 82.** Линия пересечения двух взаимно перпендикулярных сечений цилиндра параллельна его оси и делит одно из этих сечений на части, площади которых равны 32 см^2 и 352 см^2 , а второе – на части, площади которых относятся как 4 : 11. Определите площадь осевого сечения.
- 83.** Около равностороннего цилиндра описана треугольная призма, периметр основания которой равен 42 см, а полная поверхность равна 504 см^2 . Определите полную поверхность цилиндра.
- 84.** Около цилиндра описана призма, объем которой равен 480 см^3 , а боковая поверхность равна 320 см^2 . Определите полную поверхность цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна 10 см.
- 85.** Около равностороннего цилиндра описана треугольная призма, объем которой равен 672 см^3 , а полная поверхность – 504 см^2 . Определите поверхность цилиндра.
- 86.** Около равностороннего цилиндра описана призма, объем которой равен 1152 см^3 . Поверхности призмы и цилиндра относятся как 9 : π . Определите радиус цилиндра.
- 87.** Конус, радиус основания которого равен 12 см, и цилиндр радиуса 10 см имеют общую высоту и равновеликие боковые поверхности. Определите объем цилиндра.
- 88.** В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму – другой цилиндр; разность боковых поверхностей этих цилиндров равна $40\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$. Определите разность объемов цилиндров, если сторона основания призмы равна 24 см.
- 89.** Около правильной треугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a , описан цилиндр так, что все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра. Определите объем и боковую поверхность цилиндра.
- 90.** Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно a , описан цилиндр так, что все вершины пира-

миды находятся на окружностях оснований цилиндра. Определите объем и боковую поверхность цилиндра.

91. Из множества цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен $2p$, найдите объем цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность.
92. Из множества цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен $2p$, найдите объем и боковую поверхность цилиндра, в котором расстояние от центра одного из оснований до окружности другого наименьшее.
93. В конус, радиус основания которого равен 6 см, а высота равна 15 см, вписан цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Определите объем этого цилиндра.
94. В конус, радиус основания которого равен R , а высота равна h , вписан цилиндр радиуса r . Найдите объем цилиндра и определите, при каком значении r объем цилиндра будет наибольшим.
95. Из множества цилиндров, вписанных в шар радиуса R , найдите объем цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность.
96. Из множества цилиндров, вписанных в шар радиуса R , найдите боковую поверхность цилиндра, имеющего наибольший объем.
97. Периметр осевого сечения цилиндра равен $2a$. Определите, чему должен быть равен радиус основания цилиндра, чтобы разность между поверхностью описанного шара и полной поверхностью цилиндра была наименьшей.
98. Периметр осевого сечения цилиндра равен $2a$. Определите, чему должен быть равен радиус основания цилиндра, чтобы сумма поверхности описанного шара и полной поверхности цилиндра была наименьшей.

4.3. Ответы и указания

$$1. \frac{h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4\pi}.$$

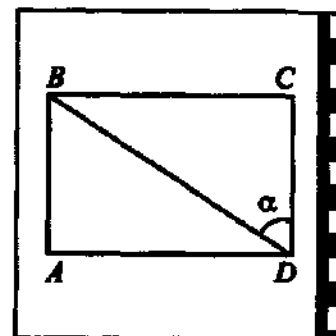


Рис. 154

Указание:

1) $CD = h$, $\angle BDC = \alpha$, R – радиус основания цилиндра (рис. 154);

2) $BC = 2\pi R$; $\triangle BCD$,
 $BC = CD \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$, следовательно,
 но, $2\pi R = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $R = \frac{h \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2\pi}$;

$$3) V = \pi R^2 \cdot CD = \frac{h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4\pi}.$$

$$2. \frac{d^3 \sqrt{2}}{16\pi}.$$

$$3. \frac{1}{4} S \sqrt{2\pi(Q - \pi S)}.$$

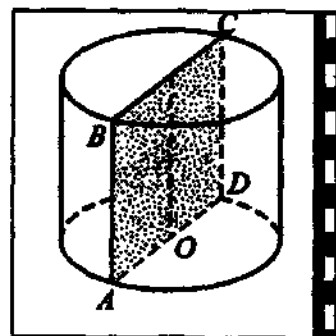


Рис. 155

Указание:

1) $S_{ABCD} = S$, $S_{\text{полн}} = Q$, $CD = H$,
 $OD = OA = R$ (рис. 155);

$$2) S = AD \cdot DC = 2R \cdot H, H = \frac{S}{2R};$$

$$3) Q = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{S}{2R},$$

$$R = \sqrt{\frac{Q - \pi S}{2\pi}}, H = \frac{S \sqrt{2\pi}}{2\sqrt{Q - \pi S}};$$

$$4) V = \pi R^2 H = \frac{1}{4} S \sqrt{2\pi(Q - \pi S)}.$$

4. $\frac{N\sqrt{\pi M}}{2}; \pi N + 2M.$

5. $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{4\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}.$

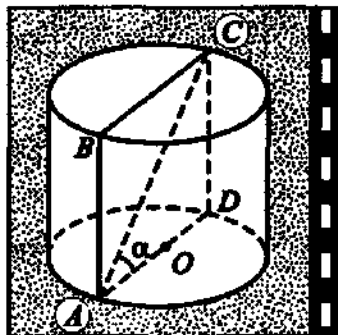


Рис. 156

6. $\frac{\sqrt{481}}{2}.$

7. $\frac{\pi}{2}.$

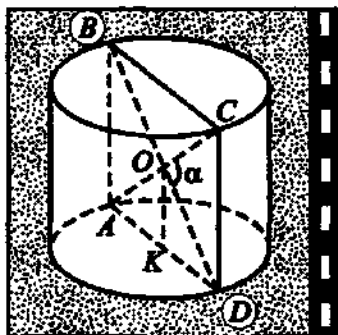


Рис. 157

Указание:

1) $S_{ABCD} = Q$, $\angle CAD = \alpha$, O — центр основания, $OD = R$ (рис. 156);

2) $\triangle ADC$, $CD = AD \operatorname{tg} \alpha = 2R \operatorname{tg} \alpha$;

3) $Q = AD \cdot CD = 4R^2 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha}};$$

4) $V = \pi R^2 \cdot CD = 2\pi R^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi Q\sqrt{Q}}{4\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}}.$

Указание:

1) $S_{осн} : S_{ABCD} = \pi : 4$, $O = AC \cap BD$, $\angle COD = \alpha$, K — центр основания (рис. 157);

2) $S_{осн} = \pi AK^2$, $S_{ABCD} = 2AK \cdot DC$;

3) $\triangle ADC$, $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$,

$$CD = 2AK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, S_{ABCD} = 4AK^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

4) $S_{осн} : S_{ABCD} = \pi AK^2 : 4AK^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pi : 4$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$, следовательно,

$$\text{но, } \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}, \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

8. 4.

9. $\frac{\pi S\sqrt{S \operatorname{ctg} \beta}}{4 \sin^2 \alpha}.$

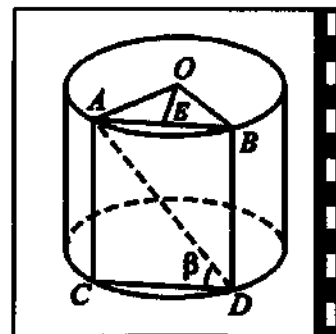


Рис. 158

Указание:

1) $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle ADC = \beta$, $S_{ABCD} = S$, O — центр основания, $OE \perp AB$;

2) $\triangle CDA$, $CD = x$, $AC = x \operatorname{tg} \beta$ (рис. 158);

3) $S = CD \cdot AC = x^2 \operatorname{tg} \beta \Rightarrow$

$$x = \sqrt{S \operatorname{ctg} \beta}, AC = \sqrt{S \operatorname{ctg} \beta} \operatorname{tg} \beta;$$

4) $\triangle AEO$, $AO = \frac{x}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{S \operatorname{ctg} \beta}}{2 \sin \alpha}$;

5) $V = S_{осн} \cdot AC = \pi AO^2 \cdot AC = \frac{\pi S\sqrt{S \operatorname{ctg} \beta}}{4 \sin^2 \alpha}.$

10. $\frac{\pi S}{\sin \frac{\pi m}{m+n}} (m \leq n).$

11. $\frac{\pi a S}{\sin \alpha}.$

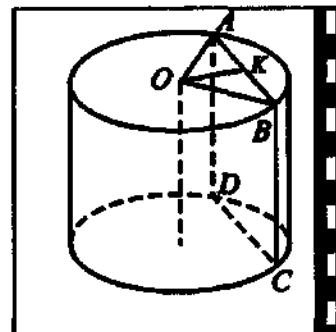


Рис. 159

Указание:

1) $AK = KB$, $OK = a$, $\angle AOB = \alpha$, O — центр основания, $S_{ABCD} = S$ (рис. 159);

2) $\triangle AKO$, $AK = OK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$AB = 2AK = 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, OA = \frac{OK}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$3) S = AB \cdot BC = \left(2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{S}{2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) V = S_{\text{осн}} \cdot BC = \pi OA^2 \cdot BC = \frac{\pi a S}{\sin \alpha}.$$

12. 10 см.

$$13. \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

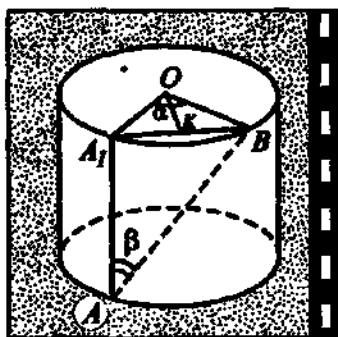


Рис. 160

Указание:

1) $\angle A_1OB = \alpha$, $A_1K = KB$, $\angle A_1AB = \beta$,
O — центр основания (рис. 160);2) $\triangle OKA_1$, $A_1K = OA_1 \sin \frac{\alpha}{2}$;

$$A_1B = 2A_1K = 2OA_1 \sin \frac{\alpha}{2};$$

3) $AA_1 = 2OA_1$;4) $\triangle AA_1B$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{A_1B}{AA_1} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$14. r \cos \frac{l}{2r} \sqrt{h^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{l}{2r}}.$$

$$15. \frac{\pi b^2 \sqrt{l^2 - 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

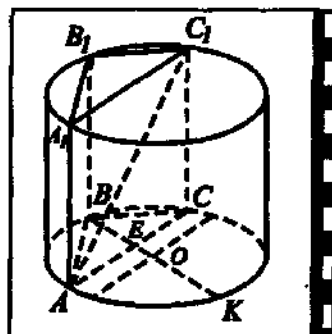


Рис. 161

Указание:

1) $BC = BA = b$, $\angle ABC = \alpha$, $AC_1 = l$,
 $AE = EC$, O — центр основания,
 $OB = OK = R$ (рис. 161);2) $\triangle BEC$, $CE = b \sin \frac{\alpha}{2}$,

$$AC = 2CE = 2b \sin \frac{\alpha}{2}, BE = b \cos \frac{\alpha}{2};$$

3) $\triangle ACC_1$,

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}};$$

4) $OE = R - BE = R - b \cos \frac{\alpha}{2}$, $EK = R + OE = 2R - b \cos \frac{\alpha}{2}$;

$$5) CE^2 = BE \cdot EK, b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = b \cos \frac{\alpha}{2} \left(2R - b \cos \frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow R = \frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$6) V = \pi R^2 \cdot CC_1 = \frac{\pi b^2 \sqrt{l^2 - 4b^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$16. \frac{\pi b^2 \sin 2\alpha}{4(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)}.$$

$$17. \frac{n}{2\pi} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

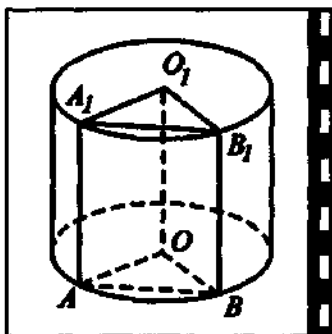


Рис. 162

Указание:

1) O — центр основания, $OA = OB = R$,
 $AA_1 = H$ (рис. 162);2) $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, $\triangle AOB$,

$$S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB \sin \angle AOB}{2} = \frac{R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{2};$$

$$3) S_{\text{осн.приз.}} = nS_{\text{AOB}} = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$4) V_n = \pi R^2 H, V_{\text{приз.}} = S_{\text{осн.}} H = \frac{R^2 n H}{2} \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$5) V_{\text{приз.}} : V_n = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

$$18. \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\pi(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}.$$

$$19. \frac{\pi h^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

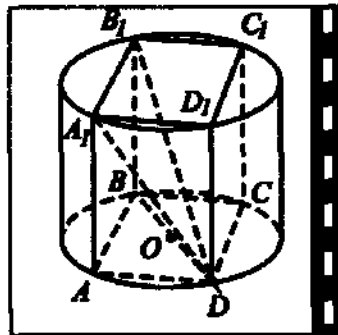


Рис. 163

Указание:

1) $\angle B_1DA_1 = \alpha$, $AA_1 = h$, O – центр основания, $AD = x$ (рис. 163);2) $\triangle A_1AD$,

$$A_1D = \sqrt{A_1A^2 + AD^2} = \sqrt{h^2 + x^2};$$

3) $\triangle B_1A_1D$, $A_1D = A_1B_1 \operatorname{ctg} \alpha = x \operatorname{ctg} \alpha$,

$$\sqrt{h^2 + x^2} = x \operatorname{ctg} \alpha, \text{ значит, } x = \frac{h}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}};$$

$$4) \triangle BAD, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = x\sqrt{2}, OB = \frac{BD}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2}};$$

$$5) S_{\text{бок.ц.}} = 2\pi OB \cdot AA_1 = \frac{\pi h^2 \sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}} = \frac{\pi h^2 \sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

$$20. \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi}\right).$$

21. 5.

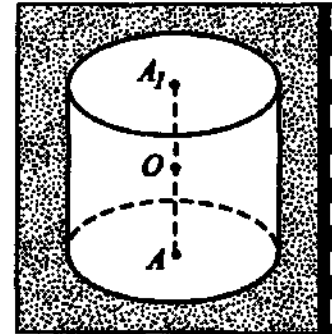


Рис. 164

Указание:

1) $V_n = \frac{15}{2}$, O – центр шара, $OA = R$, A – центр основания цилиндра, $AA_1 = H$ (рис. 164);2) $AA_1 = 2OA = 2R$,

$$V_n = \pi R^2 \cdot AA_1 = 2\pi R^3, \frac{15}{2} = 2\pi R^3 \Rightarrow$$

$$R^3 = \frac{15}{4} \pi;$$

$$3) V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{15}{4\pi} = 5.$$

$$22. \frac{9}{4}.$$

$$23. \frac{2}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

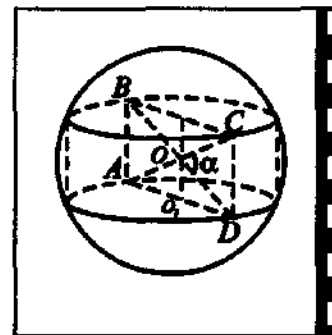


Рис. 165

Указание:

1) $\angle COD = \alpha$, O – центр шара, O_1 – центр основания цилиндра, $OD = R$, $O_1D = r$ (рис. 165);2) $\triangle CAD$, $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$,

$$CD = AC \sin \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2};$$

3) $\triangle OO_1D$,

$$r = \sqrt{OD^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{CD^2}{4}} = R \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$4) V_{\text{ш}} = \frac{4\pi R^3}{3}, V_{\text{у}} = \pi r^2 CD^2 = 2\pi R^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$5) V_{\text{ш}} : V_{\text{у}} = \frac{2}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$24. a(3\sqrt{2} + 4).$$

$$25. 1 : \cos \varphi.$$

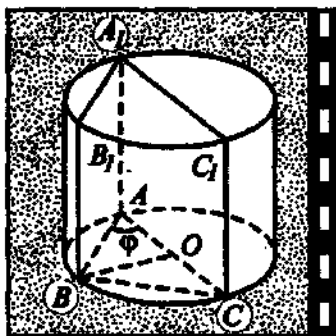


Рис. 166

Указание:

- 1) $\angle BAC = \varphi$, O — центр основания, $OA = R$, $AA_1 = H$ (рис. 166);
- 2) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = 2RH$;
- 3) $\triangle ACB$, $AB = 2R \cos \varphi$;
- 4) $S_{ABB_1A_1} = AB \cdot AA_1 = 2RH \cos \varphi$;
- 5) $S_{AA_1C_1C} : S_{AA_1B_1B} = 1 : \cos \varphi$.

$$26. S\sqrt{2}.$$

$$27. \frac{2}{27} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

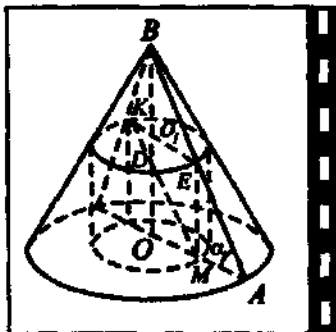


Рис. 167

Указание:

- 1) $MK \parallel AB$, $AB = l$, O — центр основания конуса, $\angle BAO = \alpha$, $\angle KMO = \alpha$, $DK = DM$ (рис. 167);
- 2) $\triangle BOA$, $OB = AB \sin \alpha = l \sin \alpha$;
- 3) $\triangle BO_1E \sim \triangle DOM$,
 $BO_1 = O_1D = DO = \frac{OB}{3} = \frac{l \sin \alpha}{3}$,
 $OM = DO \operatorname{ctg} \alpha = \frac{l \cos \alpha}{3}$;

$$4) V_{\text{у}} = \pi OM^2 \cdot OO_1 = 2\pi OM^2 \cdot OD = 2\pi \frac{l^2 \cos^2 \alpha}{9} \cdot \frac{l \sin \alpha}{3} =$$

$$= \frac{2}{27} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha.$$

$$28. \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{4 - \sqrt{6}} \right).$$

$$29. \operatorname{arctg} 2.$$

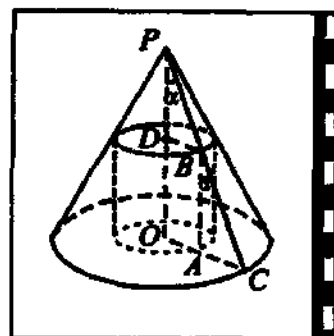


Рис. 168

Указание:

- 1) O — центр основания, $OC = OD = R$, $\angle OPC = \alpha$, $S_{\text{пл.}} : S_{\text{осн.к.}} = 3 : 2$,
 $OA = r$ (рис. 168);
- 2) $S_{\text{пл.}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot OD = 2\pi r^2 + 2\pi r R$,
 $S_{\text{осн.к.}} = \pi R^2$, $(2\pi r^2 + 2\pi r R) : \pi R^2 = 3 : 2$
 $\Rightarrow 4r^2 + 4Rr - 3R^2 = 0$, $r = \frac{R}{2}$;
- 3) $\triangle BAC$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{2R}{R} = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

$$30. \operatorname{arctg} \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}.$$

$$31. 2\sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha).$$

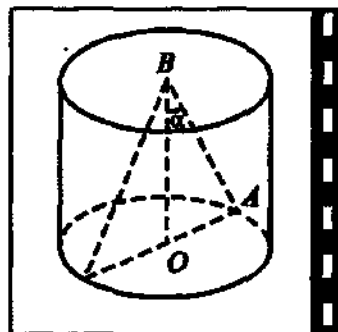


Рис. 169

Указание:

- 1) $V_K = V$, O — центр основания, $\angle OBA = \alpha$, $OA = R$, $OB = H$ (рис. 169);
- 2) $\triangle BOA$, $H = OA \operatorname{ctg} \alpha = R \operatorname{ctg} \alpha$;
- 3) $V = \frac{\pi OA^2 \cdot OB}{3} = \frac{\pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha}{3} \Rightarrow$
 $R = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt[3]{\pi \operatorname{ctg} \alpha}};$

$$4) S_{\text{пол.}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha).$$

$$32. \arcsin \frac{3}{5}.$$

$$33. \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{S \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \alpha.$$

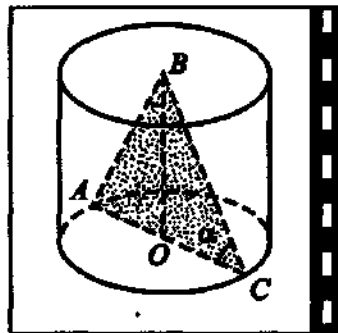


Рис. 170

Указание:

1) O – центр основания, $\angle BCO = \alpha$,
 $S_{\text{пол.к.}} = S$, $OC = R$, $OB = H$ (рис. 170);

2) $\triangle BOC$, $BC = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$,
 $OB = OC \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \alpha$;

3) $S = \pi R^2 + \pi R \cdot BC = \frac{\pi R^2(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}$
 $\Rightarrow R = \frac{\sqrt{S \cos \alpha}}{\sqrt{\pi(1 + \cos \alpha)}}$, $H = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{S \cos \alpha}}{\sqrt{\pi(1 + \cos \alpha)}}$;

4) $V_{\text{к.}} = \pi R^2 H = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{S \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \alpha.$

$$34. 2\pi a^3.$$

$$35. H = 4, R = 2.$$

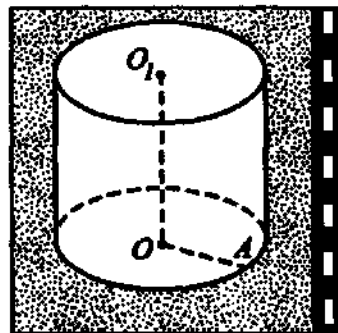


Рис. 171

Указание:

1) $V = 16\pi$, O – центр основания,
 $OA = R$, $OO_1 = H$ (рис. 171);

2) $V_{\text{к.}} = \pi R^2 H$, $\pi R^2 H = 16\pi \Rightarrow$
 $R = \frac{4}{\sqrt{H}}$;

3) $S_{\text{пол.}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = \frac{32\pi}{H} + \frac{8\pi H}{\sqrt{H}},$

$$S' = -\frac{32\pi}{H^2} + \frac{4\pi}{\sqrt{H}}, S' = 0 \Rightarrow \frac{-32\pi + 4\pi H \sqrt{H}}{H^2} = 0 \Rightarrow H = 4;$$

4) $H = 4$ – точка минимума, $R = 2$.

$$36. 2:1.$$

$$37. R = \frac{3r}{2}, V = \frac{9\pi r^2 h}{4}.$$

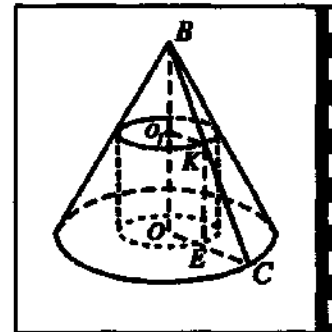


Рис. 172

Указание:

1) O – центр основания; $OE = O_1K = r$,
 $OO_1 = h$, $OC = R$, $OB = H$, $O_1B = x$
 (рис. 172);

2) $\triangle BO_1K \sim \triangle BOC$, $BO_1 : BO = O_1K : OC$,

$$\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R} \Rightarrow x = \frac{rh}{R-r},$$

$$H = x + h = \frac{Rh}{R-r};$$

3) $V_{\text{к.}} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi h R^3}{3(R-r)}$, $V_{\text{к.}}' = \frac{\pi h(2R^2 - 3R^2 r)}{3(R-r)^2}$, $R = \frac{3r}{2}$ – точка минимума, $H = 3h$, $V_{\text{к.}} = \frac{9\pi r^2 h}{4}.$

$$38. 2\operatorname{arctg} \frac{r}{2H}.$$

$$39. 3:8.$$

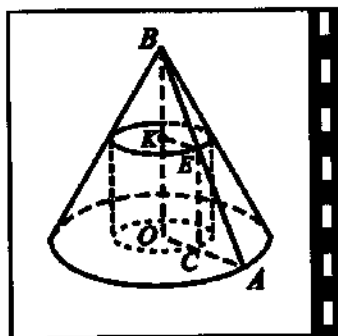


Рис. 173

Указание:

1) O – центр основания,

$$OC = \frac{OA}{2} \text{ (рис. 173);}$$

2) $\triangle BKE \sim \triangle BOA$, $BK : BO = KE : OA$
 $\Rightarrow OB = 2BK$;

$$3) V_K = \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot OB = \frac{1}{3} \pi (2OC)^2 2BK =$$

$$= \frac{8\pi OC^2 \cdot BK}{3}, V_{\text{ч}} = \pi OC^2 \cdot OK;$$

$$4) V_{\text{ч}} : V_K = 3 : 8.$$

$$40. \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$41. \frac{27}{16 \sin^2 \alpha}.$$

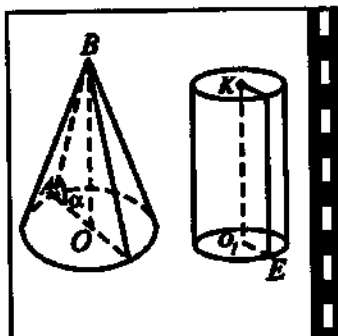


Рис. 174

Указание:

1) $S_{\text{бок.шля}} = S$, $S_{\text{бок.кон.}} = Q$, $S : Q = 3 : 2$,
 $BO = O_1K$, $\angle BAO = \alpha$ (рис. 174);2) $S = 2\pi O_1E \cdot O_1K$, $Q = \pi OA \cdot AB$;3) $\triangle AOB$, $AB = \frac{BO}{\sin \alpha}$, $Q = \frac{\pi OA \cdot BO}{\sin \alpha}$;4) $S : Q = 3 : 2 \Rightarrow$

$$(2\pi O_1E \cdot O_1K) : \left(\frac{\pi OA \cdot BO}{\sin \alpha} \right) = 3 : 2 \Rightarrow$$

$$\frac{O_1E}{OA} = \frac{3}{4 \sin \alpha};$$

$$5) V_{\text{ч}} = \pi O_1E^2 \cdot O_1K, V_K = \frac{\pi OA^2 \cdot OB}{3};$$

$$6) V_{\text{ч}} : V_K = 3 \frac{O_1E^2}{OA^2} = \frac{27}{16 \sin^2 \alpha}.$$

$$42. \frac{24\pi R^2 \sin^4 \alpha}{(2 + \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

$$43. \frac{6m - 3n}{4n}.$$

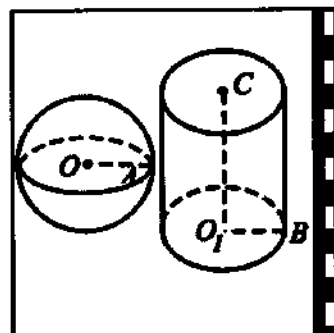


Рис. 175

Указание:

1) O – центр шара, O_1 – центр основания цилиндра, $OA = O_1B = R$,

$$O_1C = H, S_{\text{полн.шля}} : S_{\text{ш}} = m : n;$$

2) $S_{\text{полн.шля}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$, $S_{\text{ш}} = 4\pi R^2$,
 $(2\pi R^2 + 2\pi RH) : 4\pi R^2 = m : n \Rightarrow$

$$H = \frac{2Rm - Rn}{n};$$

$$3) V_{\text{ч}} = \pi R^2 H = \pi R^2 \frac{2Rm - Rn}{n}, V_{\text{ш}} = \frac{4\pi R^3}{3};$$

$$4) V_{\text{ч}} : V_{\text{ш}} = \frac{6m - 3n}{4n} \text{ (рис. 175).}$$

$$44. 3 : 2 : 1.$$

$$45. \frac{2\pi S(\sqrt{2} + 3)}{3}.$$

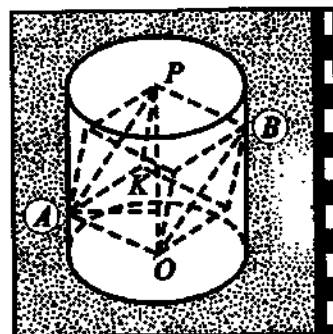


Рис. 176

Указание:

1) O , P – центры оснований, $AK \perp OP$,

$$S_{\text{д.ов.р}} = S$$
, $AK = r$, $OP = h$,

$$OA = x \text{ (рис. 176);}$$

2) $S = AO \cdot AP$, $AP = x\sqrt{2}$, $S = x^2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow x^2 = \frac{S}{\sqrt{2}};$

$$3) h^2 = AO^2 + AP^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2 = \frac{3S}{\sqrt{2}};$$

$$4) \triangle OAP, hr = S \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{h^2} = \frac{S\sqrt{2}}{3};$$

$$5) S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \frac{2\pi S(\sqrt{2} + 3)}{3}.$$

$$46. \frac{\pi Q \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

$$47. \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

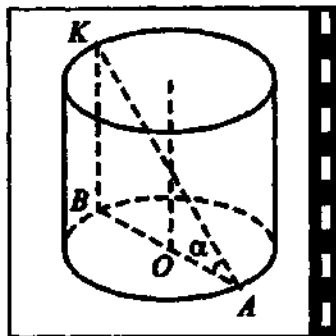


Рис. 177

Указание:

1) $AK = a$, $\angle BAK = \alpha$, O — центр основания, $OA = R$, $BK = H$ (рис. 177);

2) $\triangle KBA$, $AB = AK \cos \alpha = a \cos \alpha$,
 $BK = AK \sin \alpha = a \sin \alpha$;

3) $S_{бок} = 2\pi R \cdot H = \pi AB \cdot H =$
 $= \pi a^2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2}.$

$$48. \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi a^2(\sqrt{2} + 1)}{2}.$$

$$49. 36 : 25.$$

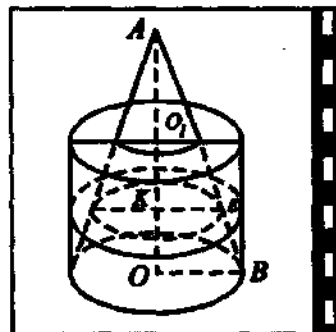


Рис. 178

Указание:

1) $V_k = V_q$, O — центр основания цилиндра, $OB = R$, $OA = H$, $OK = KO_1$,
 $KE = r$, $OO_1 = h$ (рис. 178);

2) $V_k = \frac{\pi R^2 H}{3}$, $V_q = \pi R^2 h$,

$$\frac{\pi R^2 H}{3} = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{H}{h} = 3, \frac{H}{OK} = 6;$$

$$3) \triangle AKE \sim \triangle AOB, AK : AO = KE : OB, (H - \frac{H}{6}) : H = r : R \Rightarrow$$

$$r : R = 5 : 6;$$

$$4) S_{сеч.у} = \pi R^2, S_{сеч.к} = \pi r^2;$$

$$5) S_{сеч.у} : S_{сеч.к} = \pi R^2 : \pi r^2 = R^2 : r^2 = 36 : 25.$$

$$50. \frac{4\pi Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

51.

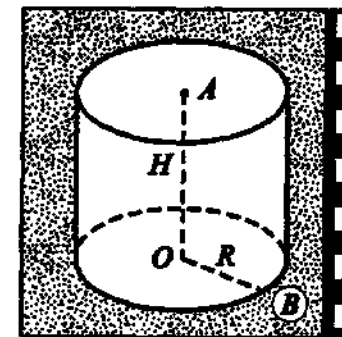


Рис. 179

Указание:

1) $OA = H$, $OB = R$, $S_{бок} = S_{осн}$;

2) $S_{бок} = 2\pi RH$, $S_{осн} = \pi R^2$;

3) $2\pi RH = \pi R^2$, $R = 2H$ (рис. 179).

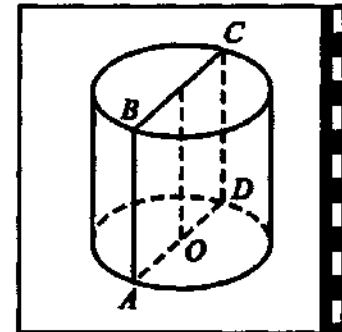
52. В π раз.53. 280π .

Рис. 180

Указание:

1) $V = 400\pi$, $S_{ABCD} = 80$, $OA = R$,
 $AB = H$ (рис. 180);

2) $V = \pi R^2 H$, $400\pi = \pi R^2 H \Rightarrow$
 $RH = \frac{400}{R}$;

3) $S_{ABCD} = AD \cdot CD = 2R \cdot H$,
 $80 = 2RH$, $RH = 40$;

$$4) \frac{400}{R} = 40, R = 10, H = 4;$$

$$5) S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 280\pi.$$

$$54. 4S \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$55. \sqrt{\frac{4V \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}}.$$

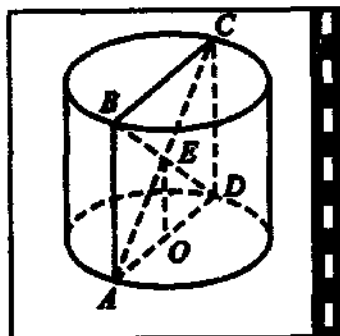


Рис. 181

Указание:

$$1) V_y = V, \angle AED = \alpha, CD = H,$$

$$OD = R \text{ (рис. 181);}$$

$$2) \triangle EOD, OD = R = OE \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{H}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$3) V = \pi R^2 H, V = \pi \left(\frac{H}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot H =$$

$$= \frac{\pi H^3}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow H = \sqrt[3]{\frac{4V \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}}.$$

$$56. \frac{\pi}{8} m^3 \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

$$57. 6 \text{ см}, 10 \text{ см}.$$

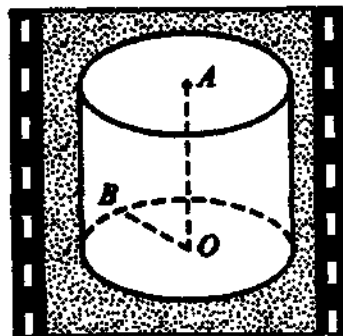


Рис. 182

Указание:

$$1) S_y = 192\pi, OA = H, OB = R,$$

$$H = R + 4 \text{ (рис. 182);}$$

$$2) S_y = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 4\pi R^2 + 8\pi R;$$

$$3) 192\pi = 4\pi R^2 + 8\pi R, R^2 + 2R - 48 = 0, R = 6, H = 10.$$

$$58. 360\pi \text{ см}^3.$$

$$59. \text{ Увеличится на } 144\pi.$$

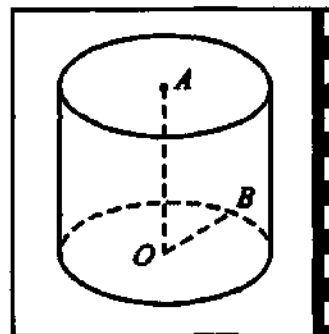


Рис. 183

Указание:

$$1) OA = H, OB = R, H = 2R,$$

$$R_1 = R + 2, H_1 = H - 3 = 2R - 3,$$

$$S_8 = S_8' \text{ (рис. 183);}$$

$$2) S_8 = 2\pi RH = 4\pi R^2,$$

$$S_8' = 2\pi R_1 H_1 = 2\pi(R + 2)(2R - 3);$$

$$3) 4\pi R^2 = 2\pi(R + 2)(2R - 3) \Rightarrow R = 6, R_1 = 8, H_1 = 9;$$

$$4) V = \pi R^2 H = 2\pi R^3 = 432\pi, V_1 = \pi R_1^2 H_1 = 576\pi;$$

$$5) V_1 - V = 576\pi - 432\pi = 144\pi.$$

$$60. 1, 4.$$

$$61. 289\pi.$$

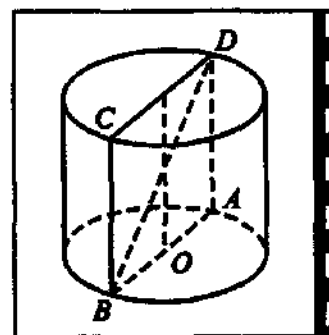


Рис. 184

Указание:

$$1) S_8 = 120\pi, OB = R = 4, R_1 = \frac{BD}{2},$$

$$H_1 = 2R_1 = BD \text{ (рис. 184);}$$

$$2) S_8 = 2\pi RH, 120\pi = 8\pi H \Rightarrow H = 15;$$

$$3) BD = \sqrt{BA^2 + DA^2} = \sqrt{289} = 17;$$

$$4) S_{8_1} = 2\pi R_1 H_1 = \pi BD^2 = 289\pi.$$

$$62. 45 \text{ см}, 125 \text{ см}.$$

63. 25.

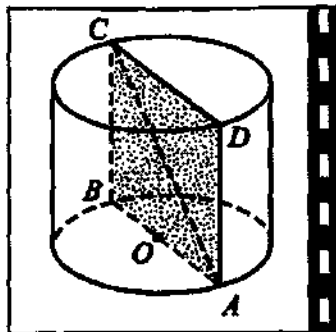


Рис. 185

Указание:

- 1) $S_{\text{ц}} = 456$, $AD = H = 7$, $OA = R$ (рис. 185);
- 2) $S_{\text{ц}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 14\pi R$;
- 3) $456\pi = 2\pi R^2 + 14\pi R \Rightarrow R^2 + 7R - 228 = 0$, $R = 12$;
- 4) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4R^2 + H^2} = 25$.

64. 6, 9.

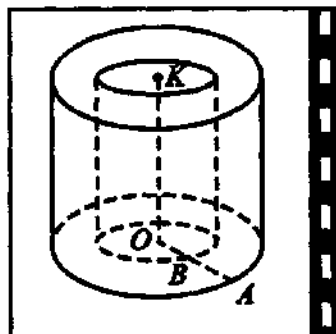
65. $900\pi \text{ см}^3$, $450\pi \text{ см}^2$.

Рис. 186

Указание:

- 1) $OA = R = 7$, $OK = H = 20$;
- 2) $OB = R_1 = 2$, $H_1 = H$ (рис. 186);
- 3) $V_1 = \pi R_1^2 H_1 = \pi R_1^2 H = 80\pi$,
 $V = \pi R^2 H = 980\pi$,
 $V_{\text{о}} = V - V_1 = 980\pi - 80\pi = 900\pi \text{ см}^3$;
- 4) $S_{\text{пов. детали}} = S - 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{с}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH - 2\pi R_1^2 + 2\pi R_1 H_1 = 450\pi \text{ см}^2$.

66. $\frac{3\pi a^3}{4}$.

67. 8 дм.

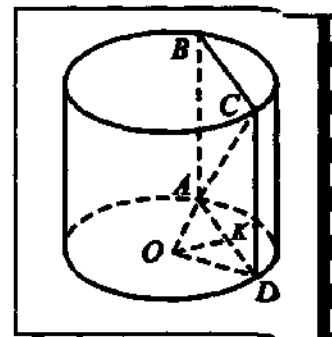


Рис. 187

Указание:

- 1) $OK = 4$, $OD = R$, $AC = 2R$ (рис. 187);
- 2) $\triangle KDO$,
 $DK = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 4^2}$,
 $AD = 2DK = 2\sqrt{R^2 - 4^2}$;
- 3) $\triangle ADC$,
 $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4R^2 - 64 + H^2}$,
 $2R = \sqrt{4R^2 - 64 + H^2} \Rightarrow H^2 = 64$, $H = 8$.

68. $4\sqrt{\pi^2 + 1}$ дм.

69. 8 см.

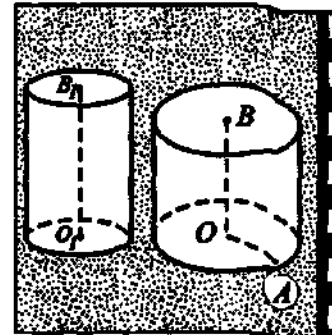


Рис. 188

Указание:

- 1) $AO = R$, $OB = H$, $H = 2R$,
 $R_1 = R + 2$, $H_1 = H - 2 = 2R - 2$,
 $S_{\text{ц}}^1 = S_{\text{ц}} + 96\pi$ (рис. 188);
- 2) $S_{\text{ц}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2$,
 $S_{\text{ц}}^1 = 2\pi R_1^2 + 2\pi R_1 H_1 = 6\pi R^2 + 12\pi R$;
- 3) $96\pi = 12\pi R \Rightarrow R = 8$.

70. 4 см.

71. 5 см, 8 см.

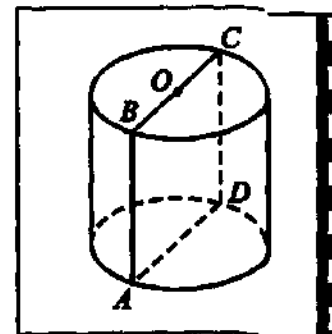


Рис. 189

Указание:

- 1) $S_{\text{ц}} = 130\pi$, $P_{ABCD} = 36$, $AB = H$,
 $OB = R$ (рис. 189);
- 2) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(H + 2R)$,
 $36 = 2(H + 2R) \Rightarrow H = 18 - 2R$;
- 3) $S_{\text{ц}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R^2 + 2\pi R(18 - 2R) =$
 $= -36\pi R - 2\pi R^2$, $130\pi = 36\pi R - 2\pi R^2$,
 $R^2 - 18R + 65 = 0 \Rightarrow R = 5$, $H = 8$
($R = 13$ не удовлетворяет условию).

72. 768π см.

73. 9 см, 5 см.

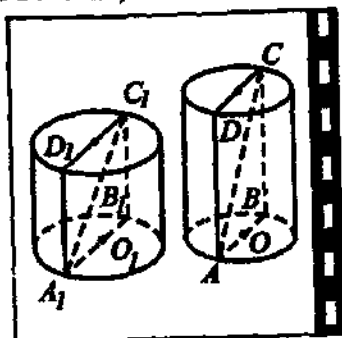


Рис. 190

Указание:

$$1) OA = R, BC = H, O_1A_1 = R_1, \\ B_1C_1 = H_1, R_1 = R, S_8^1 : S_8 = 5 : 9, \\ AC = 15, A_1C_1 = 13 \text{ (рис. 190);}$$

$$2) S_8^1 = 2\pi R_1 H_1, S_8 = 2\pi R H, \\ 5 : 9 = 2\pi R_1 H_1 : 2\pi R H, H_1 = \frac{5}{9} H;$$

$$3) \triangle ABC, H = \sqrt{AC^2 - AB^2}, \\ H = \sqrt{225 - 4R^2}, \triangle A_1B_1C_1,$$

$$H_1 = \sqrt{A_1C_1^2 - A_1B_1^2}, H_1 = \sqrt{169 - 4R^2}, \frac{5H}{9} = \sqrt{169 - 4R^2};$$

$$4) \sqrt{225 - 4R^2} = \frac{9}{5} \sqrt{169 - 4R^2}, R^2 = 36, H = 9, H_1 = 5.$$

74. 13 дм.

75. 8 см.

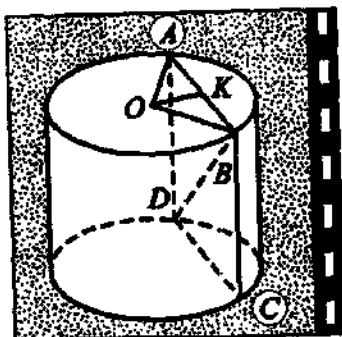


Рис. 191

Указание:

$$1) OK \perp AB, S_8 = 80\pi, OK = 4, BD = 10, \\ OA = R, BC = H \text{ (рис. 191);}$$

$$2) S_8 = 2\pi \cdot RH, 80\pi = 2\pi RH, \\ R = \frac{40}{H};$$

$$3) \triangle OKA, \\ AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 16}, \\ AB = 2AK = 2\sqrt{R^2 - 16} = 2\sqrt{\left(\frac{40}{H}\right)^2 - 16};$$

$$4) \triangle DAB, AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{100 - H^2};$$

$$5) \sqrt{100 - H^2} = 2\sqrt{\left(\frac{40}{H}\right)^2 - 16}, H = 8 \text{ (} H = 10 \text{ не удовлетворяет условию).}$$

76. 5 см.

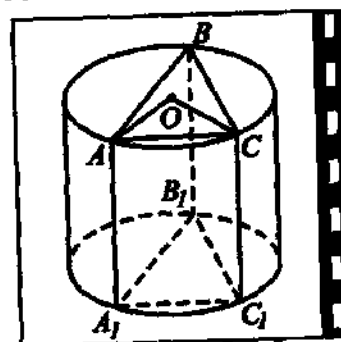
77. 28π см².

Рис. 192

Указание:

$$1) \angle ABC = 60^\circ, S_{A_1ABB_1} = 26, \\ S_{B_1BCC_1} = 22, AB = a, BC = b, \\ OA = R, AA_1 = H \text{ (рис. 192);}$$

$$2) \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle AOC = 120^\circ;$$

$$3) \triangle ABC, AC^2 = \\ = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab;$$

$$4) \triangle AOC, AC^2 = (2R \cos 30^\circ)^2 = 3R^2;$$

$$5) S_{A_1ABB_1} = aH, 26 = aH, a = \frac{26}{H}, S_{B_1BCC_1} = bH, 22 = bH, b = \frac{22}{H};$$

$$6) a^2 + b^2 - ab = 3R^2, \left(\frac{26}{H}\right)^2 + \left(\frac{22}{H}\right)^2 - \frac{26}{H} \cdot \frac{22}{H} = 3R^2, HR = 14,$$

$$S_{бок} = 2\pi RH = 28\pi.$$

78. 10 см.

79. 24 см.

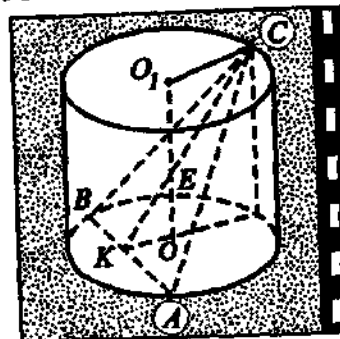


Рис. 193

Указание:

$$1) BC = AC, AB = 32, S_{ABC} = 640, \\ OO_1 = H, OA = R, CK \perp BA,$$

$$OE : EO_1 = 3 : 5 \text{ (рис. 193);}$$

$$2) S_{ABC} = \frac{CK \cdot AB}{2}, 640 = \frac{CK \cdot 32}{2}, CK = 40;$$

$$3) \triangle KOE \sim \triangle CO_1E, R : OK = 5 : 3 \Rightarrow \\ OK = \frac{3R}{5};$$

$$4) \triangle AKO, OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - 16^2};$$

$$5) \frac{3R}{5} = \sqrt{R^2 - 16^2} \Rightarrow R = 20, OK = 12;$$

$$6) H = \sqrt{CK^2 - (R + OK)^2} = 24.$$

$$80. 39\sqrt{3}\pi \text{ см}^2.$$

$$81. 170 \text{ см}^2.$$

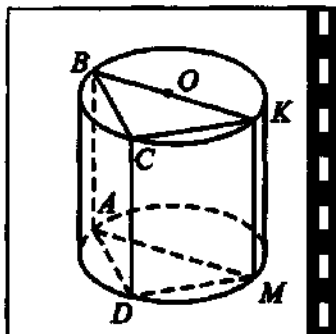


Рис. 194

$$5) S_{BCDA} = BC \cdot H, S_{KCDM} = CK \cdot H, 70 = H(CK - BC), H = 10, BC = 8, CK = 15;$$

$$6) \triangle BCK, BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = 17, S_{BKMA} = BK \cdot H = 170.$$

$$82. 400 \text{ см}^2.$$

$$83. 96\pi \text{ см}^2.$$

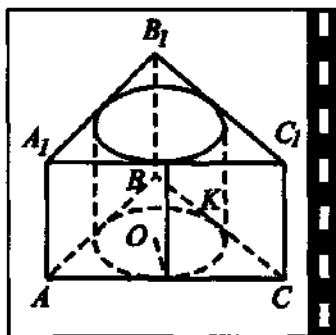


Рис. 195

Указание:

$$1) (BCDA) \perp (KCDM), P_{BCDA} = 36,$$

$$P_{KCDM} = 50, S_{BCDA} - S_{KCDM} = 70,$$

$$OB = R, DC = H \text{ (рис. 194);}$$

$$2) P_{BCDA} = 2(H + BC), 36 = 2(H + BC), H = 18 - BC;$$

$$3) P_{KCDM} = 2(H + CK),$$

$$50 = 2(H + CK), H = 25 - CK;$$

$$4) 18 - BC = 25 - CK \Rightarrow CK - BC = 7;$$

$$5) S_{BCDA} = BC \cdot H, S_{KCDM} = CK \cdot H, 70 = H(CK - BC), H = 10,$$

$$BC = 8, CK = 15;$$

$$6) \triangle BCK, BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = 17, S_{BKMA} = BK \cdot H = 170.$$

Указание:

$$1) H = 2R, P_{ABC} = 42, S_{пр} = 504,$$

$$AA_1 = H, OK = R \text{ (рис. 195);}$$

$$2) S_{пр} = 2S_{ABC} + S_{бок}, S_{ABC} = \frac{P_{ABC} \cdot R}{2},$$

$$S_{бок} = P_{ABC} \cdot H, S_{пр} = P_{ABC}(R + H),$$

$$504 = 42(R + H) \Rightarrow R + H = 12, \text{ или}$$

$$3R = 12, R = 4;$$

$$3) S_{\text{ц}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2 = 96\pi.$$

$$84. 64\pi \text{ см}^2.$$

$$85. 96\pi \text{ см}^2.$$

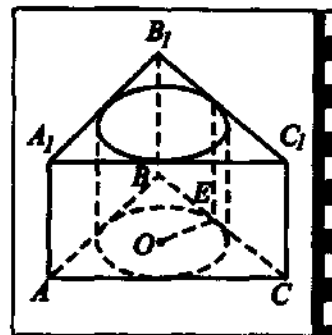


Рис. 196

Указание:

$$1) H = 2R, V_{\text{приз}} = 672, S_{\text{приз}} = 504,$$

$$OE = R, AA_1 = H \text{ (рис. 196);}$$

$$2) V_{\text{приз}} = S_{ABC} \cdot H = S_{ABC} 2R = \frac{1}{2} P_{ABC} R \cdot 2R = R^2 P_{ABC}, 672 = R^2 P_{ABC}, P_{ABC} = \frac{672}{R^2};$$

$$3) S_{\text{приз}} = 2S_{ABC} + S_{бок} = P_{ABC} \cdot R + P_{ABC} \cdot H = P_{ABC} \cdot 3R, 504 = 3R \frac{672}{R^2}, R = 4;$$

$$4) S_{\text{ц}} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 6\pi R^2 = 96\pi \text{ см}^2.$$

$$86. 4 \text{ см}.$$

$$87. 900\pi \text{ см}^3.$$

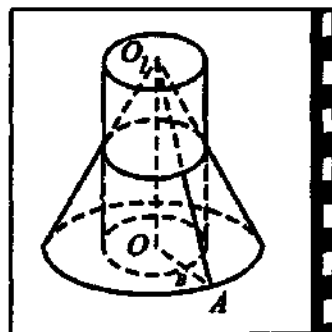


Рис. 197

Указание:

$$1) OA = 12, OB = 10, OO_1 = H,$$

$$S_{\text{бок.к.}} = S_{\text{бок.ц.}} \text{ (рис. 197);}$$

$$2) S_{\text{бок.к.}} = \pi OA \cdot O_1A = 12\pi \sqrt{OA^2 + H^2} = 12\pi \sqrt{12^2 + H^2};$$

$$3) S_{\text{бок.ц.}} = 2\pi OB \cdot H = 20\pi H;$$

$$4) 12\pi \sqrt{12^2 + H^2} = 20\pi H \Rightarrow H = 9 \text{ см;}$$

$$5) V_{\text{ц}} = \pi OB^2 \cdot H = 900\pi.$$

$$88. 720\pi \text{ см}^3.$$

89. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}, \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

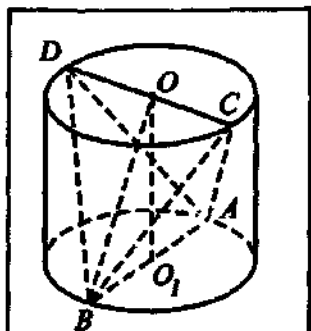


Рис. 198

Указание:

1) $AB = a, OD = R, OB = h, OO_1 = H$ (рис. 198);

2) $R = \frac{a}{2}, \triangle DOB,$

$$h = \sqrt{DB^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

3) $\triangle BOO_1, H = OO_1 =$

$$= \sqrt{OB^2 - BO_1^2} = \sqrt{h^2 - R^2} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

4) $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}, S_{\text{б}} = 2\pi RH = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}.$

90. $\frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{9}, \frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}.$

91. $\frac{\pi p^3}{32}.$

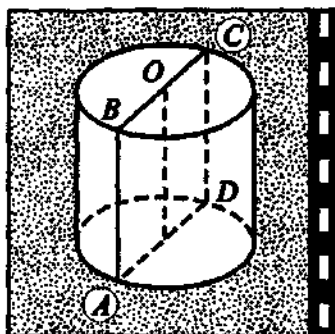


Рис. 199

Указание:

1) $P_{ABCD} = 2p, S_{\text{бок}} - \text{наибольшая}, AB = H, OB = R$ (рис. 199);

2) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(H + 2R), 2p = 2(H + 2R), H = p - 2R;$

3) $S_{\text{бок}} = 2\pi RH = 2\pi pR - 4\pi R^2;$

4) $S'_{\text{бок}} = 2\pi p - 8\pi R = 0 \Rightarrow R = \frac{p}{4},$

$$H = \frac{p}{2};$$

5) $V = \pi R^2 \cdot H = \frac{\pi p^3}{32}.$

92. $\frac{4\pi p^3}{125}, \frac{4\pi p^2}{25}.$

93. $\frac{125\pi}{2} \text{ см}^3.$

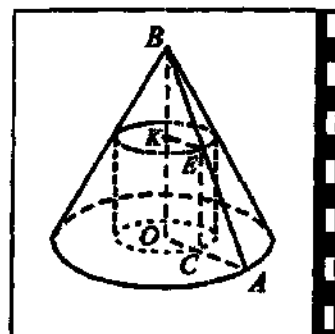


Рис. 200

Указание:

1) $OA = 6, OB = 15, S_{\text{ц}} - \text{наибольшая}, OK = h, OC = r$ (рис. 200);

2) $\triangle ACE \sim \triangle BOA, AC : OA = EC : OB, (6 - r) : 6 = h : 15 \Rightarrow h = 15 - 2.5r;$

3) $S_{\text{ц}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + 15r - 2.5r^2) = 2\pi(15r - 1.5r^2);$

4) $S'_{\text{ц}} = 2\pi(15 - 3r) = 0 \Rightarrow r = 5, h = 2.5;$

5) $V_{\text{ц}} = \pi r^2 h = \frac{125\pi}{2}.$

94. $\frac{\pi r^2 h(R - r)}{R}$ при $r = \frac{2R}{3}.$

95. $\frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}.$

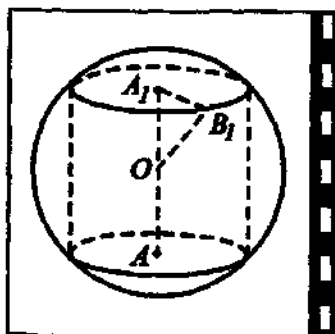


Рис. 201

Указание:

1) $O - \text{центр шара}, R - \text{радиус шара}, AA_1 = H, AB_1 = R_1, S_{\text{бок}} - \text{наибольшая}$ (рис. 201);

2) $\triangle OA_1B_1, AB_1 = \sqrt{OB_1^2 - OA_1^2},$

$$R_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2};$$

3) $S_{\text{бок}} = 2\pi R_1 H = \pi \sqrt{4H^2 R^2 - H^4};$

$$4) S'_{бок} = \frac{\pi(8R^2H - 4H^3)}{2\sqrt{(4H^2R^2 - H^4)}} = 0 \Rightarrow H = R\sqrt{2}, R_1 = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

$$5) V_{ш} = \pi R_1^2 H = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}.$$

$$96. \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi R^2.$$

$$97. \frac{3a}{10}.$$

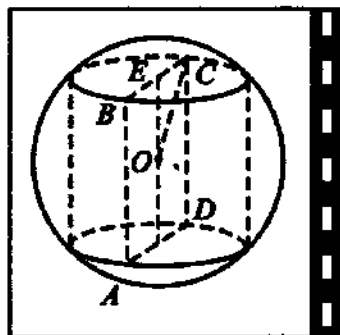


Рис. 202

Указание:

1) $P_{ABCD} = 2a$, O — центр шара, R_1 — радиус шара, $EC = R$, $AB = H$, $S_{ш} - S_{ч}$ — наименьшая (рис. 202);

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC) = 2(2R + H)$,
 $2a = 2(2R + H) \Rightarrow H = a - 2R$;

3) $S_{ч} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi aR - 2\pi R^2$;

4) $\triangle OEC$, $OC = \sqrt{OE^2 + EC^2}$,

$$R_1 = \sqrt{R^2 + \frac{H^2}{4}}, S_{ш} = 4\pi R_1^2 = 8\pi R^2 + \pi a^2 - 4\pi aR;$$

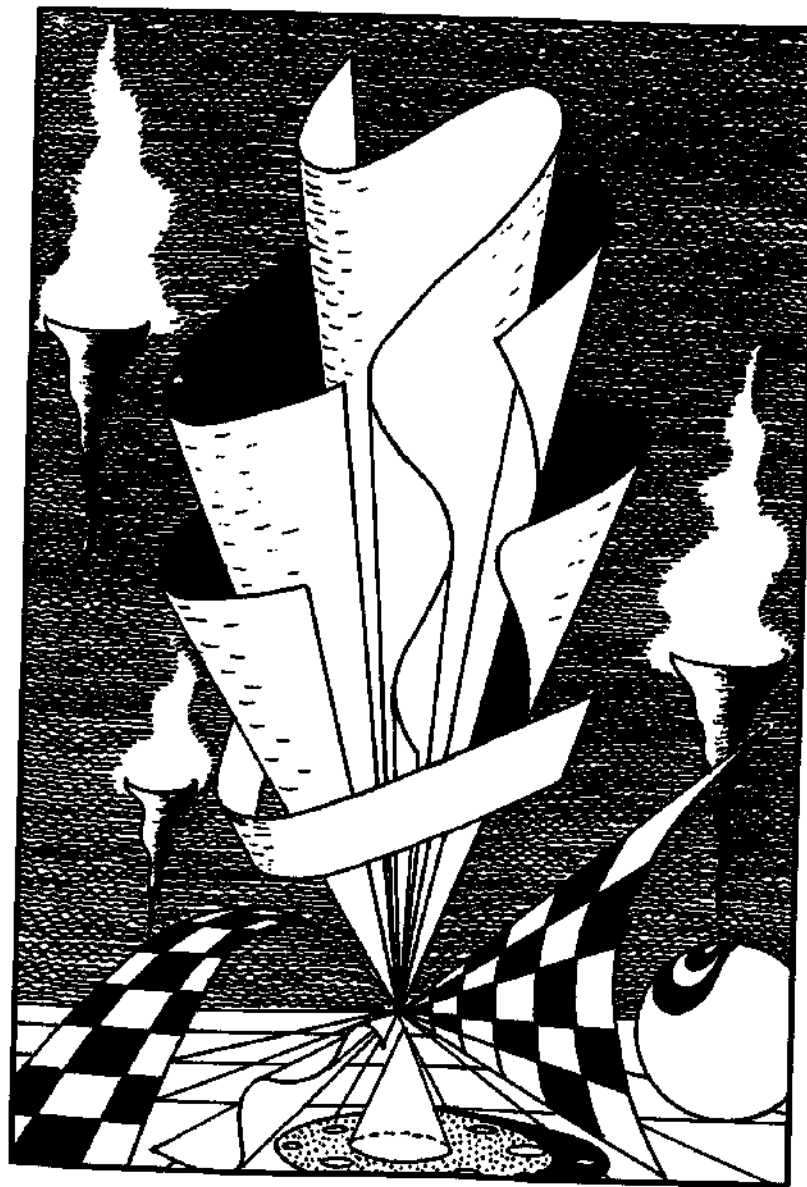
$$5) S_{ш} - S_{ч} = 10\pi R^2 + \pi a^2 - 6\pi aR;$$

$$6) (S_{ш} - S_{ч})' = 20\pi R - 6\pi a = 0, R = \frac{3a}{10}.$$

$$98. \frac{a}{6}.$$

5

Конус



5. КОНУС

5.1. Формулы, задачи

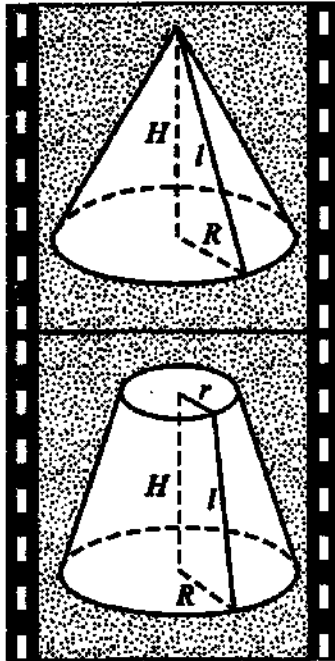


Рис. 203

1. Конус (R – радиус основания; H – высота; l – образующая; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; V – объем; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности).

$$1) S_{бок} = \pi R l;$$

$$2) V = \frac{1}{3} \pi R^2 H;$$

$$3) S_{полн} = \pi R(R + l).$$

2. Усеченный конус (R, r – радиусы оснований; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ – площадь полной поверхности, l – образующая; H – высота; V – объем).

$$1) S_{бок} = \pi(R + r) \cdot l;$$

$$2) V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2);$$

$$3) S_{полн} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r) \cdot l.$$

3. Конус, описанный около пирамиды. Для того, чтобы около пирамиды можно было описать конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды были равны.

4. Конус, вписанный в пирамиду. Для того, чтобы в пирамиду можно было вписать конус, необходимо и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, а вершина пирамиды ортогонально проектировалась в центр этой окружности.

5. Конус, вписанный в сферу. Около любого конуса можно описать сферу.

6. Конус, описанный около сферы. В любой конус можно вписать сферу.

7. Усеченный конус, вписанный в сферу. Около всякого усеченного конуса можно описать сферу.

8. Усеченный конус, описанный около сферы. В усеченный конус можно вписать сферу только в том случае, когда образующая конуса равна сумме радиусов оснований конуса.

Задача 1. Площадь осевого сечения конуса равна 12, а длина его образующей равна 5. Найдите отношение объема конуса к площади его боковой поверхности.

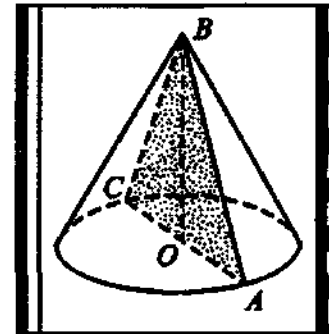


Рис. 204

Решение. Пусть треугольник ABC – осевое сечение конуса, точка O – центр основания (рис. 204). Тогда $S_{ABC} =$

$$= OA \cdot OB = 12, V = \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot OB, S_{бок} =$$

$$= \pi OA \cdot AB. \text{ Следовательно, } V : S_{бок} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot OB \right) : (\pi OA \cdot AB) =$$

$$= (OA \cdot OB) : (3AB) = 12 : 15 = 4 : 5.$$

Задача 2. Высота конуса равна H , угол между образующей и высотой α . В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найдите объем вписанного конуса.

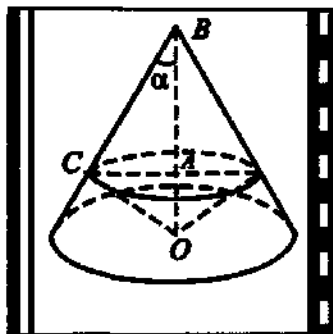


Рис. 205

Решение. Пусть точки O и A - центры оснований конусов, а точка C - общая точка основания вписанного конуса и образующей большего конуса (рис. 205). По условию задачи $BO = H$, $\angle OCB = 90^\circ$, $\angle CBO = \alpha$. В треугольнике BCO катет $OC = OB \sin \alpha = H \sin \alpha$. Из прямоугольного треугольника OAC ($\angle CAO = 90^\circ$, $\angle ACO = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$) находим $AC = OC \cos \alpha = H \sin \alpha \cos \alpha$, $OA =$
 $= OC \sin \alpha = H \sin^2 \alpha$. Таким образом, объем вписанного конуса
 $V = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot OA = \frac{1}{3} H^3 \pi \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha$.

Задача 3. Угол наклона образующей конуса к основанию равен α . Найдите боковую поверхность, если объем конуса равен V .

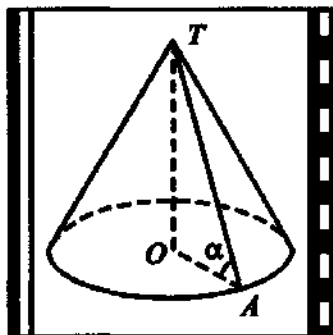


Рис. 206

Решение. Пусть радиус основания $OA = r$ (рис. 206). В прямоугольном треугольнике TOA гипотенуза $TA = l = \frac{OA}{\cos \alpha} =$
 $= \frac{r}{\cos \alpha}$, а катет $TO = h = OA \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha$. Подставляя h в формулу объема конуса
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, получаем $V = \frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha$.

Следовательно, $r = \sqrt[3]{\frac{3V \operatorname{ctg} \alpha}{\pi}}$. Теперь на-

ходим площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \pi r l = \frac{\sqrt[3]{\pi 9 V^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\cos \alpha}$.

Задача 4. Площадь осевого сечения конуса равна S , а площадь его боковой поверхности равна πQ . Найдите площадь основания конуса.

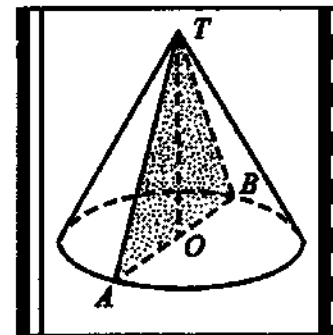


Рис. 207

Решение. По условию задачи

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot TO = RH, S_{\text{бок}} = \pi R l = \pi Q.$$

Следовательно, $\pi R l : RH = \pi Q : S$, или

$$l : H = Q : S. \text{ Отсюда находим } H = \frac{Sl}{Q}.$$

Из прямоугольного треугольника TOB

$$\text{катет } OB = R = \sqrt{TB^2 - TO^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{Sl}{Q}\right)^2} =$$

$$= \frac{l \sqrt{Q^2 - S^2}}{Q}. \text{ Отсюда } l = \frac{QR}{\sqrt{Q^2 - S^2}}. \text{ Таким образом, боковая по-}$$

$$\text{верхность конуса } S_{\text{бок}} = \pi Q = \pi R l = \pi R \frac{QR}{\sqrt{Q^2 - S^2}}.$$

Следовательно, $R^2 = \sqrt{Q^2 - S^2}$, а площадь основания конуса

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi \sqrt{Q^2 - S^2} \text{ (рис. 207)}.$$

Задача 5. Плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды прямые. Найдите полную поверхность конуса, описанного около пирамиды, если высота пирамиды равна H .

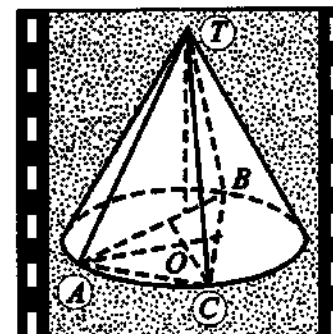


Рис. 208

Решение. Плоские углы при вершине пирамиды $TABC$ (рис. 208) - прямые, следовательно, справедливо равенство

$$\frac{1}{TO^2} = \frac{1}{TA^2} + \frac{1}{TB^2} + \frac{1}{TC^2} \text{ (Точка } O \text{ -}$$

центр основания). Пусть $AT = x$, тогда

$$\frac{1}{H^2} = \frac{3}{x^2}, \quad x = H\sqrt{3}. \text{ В прямоуголь-$$

$$\text{ном треугольнике } ATC \text{ гипотенуза } AC = \sqrt{AT^2 + TC^2} = x\sqrt{2} = H\sqrt{6}. \text{ Радиус ок-}$$

ружности, описанной около равностороннего треугольника ABC ,

$$R = \frac{AC\sqrt{3}}{3} = \frac{H\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = H\sqrt{2}. \text{ Таким образом, полная поверхность}$$

$$\text{конуса } S_{\text{полн}} = \pi R(R + l) = \pi H\sqrt{2}(H\sqrt{2} + H\sqrt{3}) = \pi H^2(2 + \sqrt{6}).$$

Задача 6. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно a . Найдите боковую поверхность конуса, если высота конуса равна H .

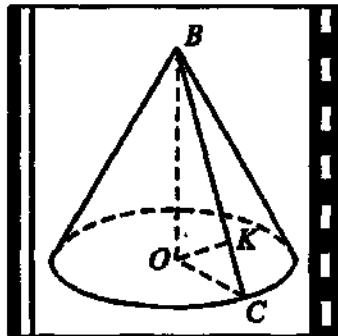


Рис. 209

Решение. Пусть точка O – центр основания конуса, OK – перпендикуляр к образующей BC (рис. 209). Тогда $OK = a$, $BO = H$. Обозначим OC через x . Так как $S_{BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC = \frac{1}{2}Hx$, $S_{BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OK = \frac{1}{2}a \cdot BC$, то $Hx = a \cdot BC$.

Отсюда находим $x = \frac{aH}{\sqrt{H^2 - a^2}}$. В пря-

моугольном треугольнике BOC гипотенуза $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = \frac{H^2}{\sqrt{H^2 - a^2}}$. Следовательно, боковая поверхность конуса $S_{\text{бок}} =$

$$= \pi Rl = \pi \cdot x \cdot BC = \pi \frac{aH}{\sqrt{H^2 - a^2}} \cdot \frac{H^2}{\sqrt{H^2 - a^2}} = \frac{\pi aH^3}{H^2 - a^2}.$$

Задача 7. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна a . Ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол α . Найдите объем конуса.

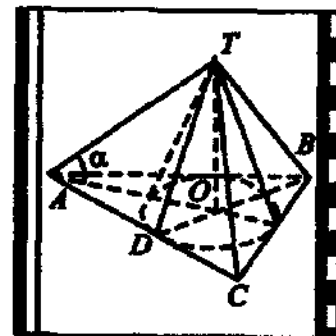


Рис. 210

Решение. Пусть $TABC$ – описанная около конуса пирамида, $AB = BC = CA = a$, $\angle TAO = \alpha$, $OD = R$ – радиус основания, $TO = H$ – высота конуса. Высота правильной треугольной пирамиды совпадает с высотой конуса. Сторона AC перпендикулярна радиусу OD . В прямоугольном треугольнике ADO ($\angle ADO = 90^\circ$, $\angle OAD = 30^\circ$, $AD = \frac{a}{2}$) гипо-

тенуза $AO = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и катет $OD = AD \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из прямоугольного треугольника AOT ($\angle AOT = 90^\circ$, $\angle TAO = \alpha$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$) находим катет $TO = AO \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, объем конуса $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi OD^2 \cdot TO = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{108} \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 210).

5.2. Задачи

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2β , а периметр осевого сечения равен $2p$. Определите полную поверхность конуса.
2. Площадь осевого сечения конуса равна S , а угол между образующими равен 2α . Найдите объем конуса.
3. Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ , а сумма длин его высоты и образующей равна a . Найдите объем конуса.

4. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α , а площадь боковой поверхности – S . Найдите объем конуса.
5. Найдите объем конуса, разверткой которого является полуокруг радиуса R .
6. Радиус основания конуса равен R , а угол развертки его боковой поверхности равен 90° . Найдите объем конуса.
7. Боковая поверхность конуса с образующей l развернута в сектор, центральный угол которого равен $\frac{6\pi}{5}$. Найдите объем конуса.
8. Объем конуса равен $\frac{\pi\sqrt{143}}{3}$. Величина угла развертки боковой поверхности конуса равна 30° . Чему равна длина его образующей?
9. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания.
10. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите квадрат отношения площади его основания к площади боковой поверхности.
11. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно a . Угол между образующей и высотой равен α . Найдите площадь полной поверхности конуса.
12. Разность между образующей конуса и его высотой равна a , а угол между ними равен α . Найдите объем конуса.
13. Площадь боковой поверхности конуса равна S , полной поверхности – P . Найдите угол между высотой и образующей.

14. Площадь боковой поверхности конуса равна P , угол между высотой и образующей равен β . Найдите объем конуса.
15. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.
16. Высота конуса равна диаметру его основания, а объем конуса равен V . Найдите объем шара, описанного около конуса.
17. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α . Вычислите объем конуса.
18. Вокруг конуса, угол наклона образующей которого к плоскости основания α , описан шар. Найдите отношение объемов данного конуса и шара.
19. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него конуса, если образующая конуса в a раз больше радиуса его основания.
20. В шар, объем которого равен V , вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведенными к концам одного и того же диаметра основания конуса, равен α . Определите объем конуса.
21. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.
22. Найдите отношение площади поверхности и объема шара соответственно к площади полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним треугольником в осевом сечении.

23. Высота конуса в четыре раза больше радиуса шара, вписанного в этот конус. Образующая конуса равна a . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
24. В прямом круговом конусе образующая равна l , а высота в m раз больше радиуса шара, вписанного в конус. Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности шара, описанного около этого конуса.
25. Объем конуса в m раз больше объема вписанного в него шара. Определите угол между образующей и плоскостью основания при наименьшем возможном значении m .
26. Полная поверхность конуса в n раз больше поверхности вписанного в него шара ($n \geq 2$). Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.
27. В конус вписан шар. Отношение объема шара к объему конуса равно g . Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса. Укажите допустимые значения g .
28. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.
29. В конус вписан шар. Найдите объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к основанию конуса под углом α .
30. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α , вписан шар. Объем конуса равен V . Найдите площадь поверхности шара.
31. Под каким углом наклонена образующая конуса к основанию, если площадь полной поверхности конуса в два раза больше площади поверхности вписанного в него шара?

32. В конус с углом φ между образующей и плоскостью основания вписан шар. Определите отношение объема конуса к объему шара.
33. Отношение радиуса основания прямого кругового конуса к радиусу вписанного в конус шара равно b . Найдите отношение объема конуса к объему шара.
34. В прямой круговой конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар радиуса R . Найдите объем конуса.
35. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как $4 : 3$. Найдите угол при вершине конуса.
36. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α , а высота конуса равна H . Найдите объем вписанного в этот конус шара, а также площадь полной поверхности конуса.
37. Высота конуса равна 8, а образующая – 10. Определите радиус вписанного шара.
38. В конус, высота которого равна радиусу основания, вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему конуса.
39. В конус вписан шар. Угол между высотой конуса и его образующей равен α . Найдите отношение объема конуса к объему шара.
40. В конус вписан шар. Найдите объем конуса, если радиус шара равен R , а угол между высотой и образующей конуса равен α .
41. На высоте конуса как на диаметре построена сфера, которая пересекает конус по некоторой окружности. Найдите радиус окружности, если образующая конуса равна a , а угол осевого сечения равен α .

42. Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол при вершине осевого сечения α .
43. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r . Найдите объем конуса, если угол между высотой и образующей равен α .
44. В прямой круговой конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r . Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса острый угол α . Найдите объем конуса.
45. В прямой круговой конус вписан шар радиуса R . Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен $\frac{3}{5}R$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
46. В конус вписан шар. Линией их касания поверхность шара делится в отношении $m : n$. Найдите угол между образующей конуса и его осью.
47. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α . Найдите объем конуса.
48. В прямом круговом конусе даны площадь основания S_1 и площадь боковой поверхности S_2 . Найдите радиус вписанного шара.
49. Около шара радиуса R описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α . Определите площадь полной поверхности конуса.

50. Радиус вписанной в конус сферы равен R . Найдите объем конуса, если центр описанной вокруг конуса сферы совпадает с центром вписанной сферы.
51. Сумма длин радиуса основания и образующей конуса равна n ; образующая составляет с основанием угол α . Найдите площадь полной поверхности конуса.
52. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α . Определите объем конуса, если его полная поверхность равна S .
53. Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса – правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.
54. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанных в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.
55. Сечение конуса, параллельное его основанию, проходит через центр описанного около конуса шара. Объем отсеченного конуса равен половине объема конуса. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.
56. Зная радиус r основания конуса, определите радиус сечения, которое параллельно основанию и делит объем конуса пополам.
57. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определите площадь боковой поверхности конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r .
58. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченно-

го конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что высота усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований. Найдите отношение величин боковых поверхностей этих тел.

59. Диагональ осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения диагоналей делится в отношении $2 : 1$, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α . Длина диагонали равна l . Найдите объем усеченного конуса.
60. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l . Определите объем усеченного конуса.
61. Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и составляет угол в 45° с плоскостью основания.
62. Найдите объем шара, описанного около усеченного конуса, у которого радиус меньшего основания в 5 раз меньше радиуса большего основания, образующая равна $2\sqrt{5}$ и составляет с основанием угол $\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.
63. Две взаимно перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении $1 : 2$. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если высота его равна h .
64. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150° . Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

65. Радиус основания конуса равен R , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . В этом конусе через его вершину проведена плоскость под углом φ к высоте конуса. Определите площадь полученного сечения.
66. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к высоте конуса. Вычислите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$, а радиус основания равен 5 .
67. Через вершину конуса под углом φ к его основанию проведена плоскость сечения. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно d и составляет половину образующей. Найдите объем конуса.
68. Образующая прямого кругового конуса имеет длину l и составляет с высотой угол α . Через две образующие конуса, составляющие между собой угол 2β , проведена плоскость. Найдите расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.
69. Высота конуса составляет с образующей угол α . Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна h .
70. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Найдите отношение площади сечения к площади полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β .
71. В конус вписана правильная шестиугольная пирамида так, что их вершины и плоскости оснований совпадают. Найдите объем и площадь боковой поверхности конуса, если боковые грани пирамиды составляют угол $\frac{\pi}{3}$ с основанием, а длина стороны основания равна 2 .

72. В правильную шестиугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Даны высота пирамиды H и радиус основания описанного конуса R . Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов.
73. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной a и апофемой m вписан конус. Найдите площадь его полной поверхности.
74. Объем конуса равен 7π . Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.
75. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a . Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α . Определите объем конуса.
76. Длина образующей конуса равна l , угол образующей с плоскостью основания равен α . Найдите объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β .
77. Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q . Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями пирамиды, равен α . Найдите длину стороны основания пирамиды.
78. Высота конуса равна h . Плоские углы при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в этот конус, равны α . Определите объем конуса.
79. Радиус основания конуса равен r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ ; около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом α . Определите объем пирамиды.

80. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна a и ее ребра образуют с плоскостью основания угол α . Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.
81. Объем прямого кругового конуса равен V . В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α . Найдите объем пирамиды.
82. Найдите объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , а двугранный угол при основании равен 60° .
83. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α . Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.
84. В треугольной пирамиде $SABC$ грани SAC и ABC перпендикулярны и являются равными равнобедренными треугольниками ($AS = AC = AB = a$, $\angle SAC = 30^\circ$). Найдите высоту прямого кругового конуса, окружность основания которого проходит через точки A , B и C , а боковая поверхность — через точку S .
85. Радиус основания конуса равен R . Площадь боковой поверхности конуса в 3π раз больше площади осевого сечения. Найдите объем конуса.
86. В прямом круговом конусе отношение площади основания к площади боковой поверхности равно m , а длина образующей равна l . Найдите объем конуса.

87. В шар вписан конус. Определите, при каких значениях радиуса шара и высоты конуса объем последнего будет наибольшим, если сумма этих значений равна a .
88. В шар радиуса R вписан конус, высота которого равна h . Определите, при каком значении h этот объем будет наибольшим.
89. В конус, радиус основания которого равен R , а высота h вписан цилиндр радиуса r . Определите, при каком значении r объем цилиндра будет наибольшим.
90. Из множества цилиндров, вписанных в данный конус, найдите радиус цилиндра, который имеет наибольшую боковую поверхность.
91. Радиус основания конуса меньше его образующей на 1 дм, а полная поверхность его равна боковой поверхности равностороннего цилиндра, радиус основания которого меньше радиуса основания конуса на 1 дм. Определите объемы конуса и цилиндра.
92. Определите объем конуса, радиус основания которого на 1 дм меньше его образующей, а полная поверхность его равна полной поверхности равностороннего конуса, радиус основания которого на 2 дм меньше радиуса основания данного конуса.
93. Найдите объем усеченного конуса, описанного около шара, радиус которого равен 6 см. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна 400π см².
94. В шар радиуса R вписан усеченный конус, образующая которого равна R , а высота h . Определите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

95. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 18 см, а площадь боковой поверхности - 480π см². Через точку пересечения диагоналей осевого сечения данного усеченного конуса проведена плоскость, параллельная основаниям. Определите объемы частей, на которые плоскость делит усеченный конус.
96. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 21 см, а его образующая 30 см. Плоскость, параллельная основаниям, делит боковую поверхность конуса на равновеликие части. Определите отношение объемов полученных усеченных конусов.
97. Около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус. Докажите, что объем цилиндра есть средняя пропорциональная величина между объемами шара и конуса.
98. Равносторонний цилиндр и равносторонний конус вписаны в шар. Докажите, что объем цилиндра есть средняя пропорциональная величина между объемами шара и конуса.
99. Из множества усеченных конусов, радиусы оснований которых относятся как 1 : 4, а периметр осевого сечения равен 60 см, найдите объем такого усеченного конуса, который имеет наибольшую боковую поверхность.
100. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна сумме площадей его оснований, а отношение радиусов оснований равно 1 : 3. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

5.3. Ответы и указания

$$1. \frac{\pi p^2 \sin \beta}{1 + \sin \beta}.$$

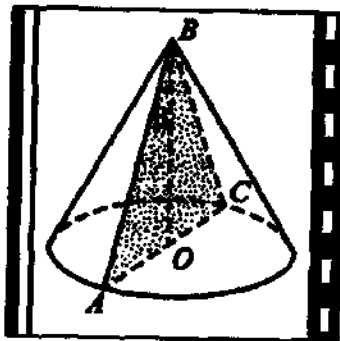


Рис. 211

Указание:

1) $\angle ABC = 2\beta$, $P_{ABC} = 2p$, O — центр основания конуса, $BC = x$ (рис. 211);

2) $\triangle BOC$, $OC = BC \sin \beta = x \sin \beta$,
 $AC = 2OC = 2x \sin \beta$;

3) $P_{ABC} = AB + BC + AC = 2x(1 + \sin \beta)$,

$$2p = 2x(1 + \sin \beta) \Rightarrow x = \frac{p}{1 + \sin \beta},$$

$$AC = \frac{2p \sin \beta}{1 + \sin \beta};$$

$$4) S_{\text{пол}} = \pi OC^2 + \pi OC \cdot CB = \frac{\pi p^2 \sin \beta}{1 + \sin \beta}.$$

$$2. \frac{1}{3} \pi S \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$3. \frac{\pi a^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{24 \cos^6 \frac{\varphi}{2}}.$$

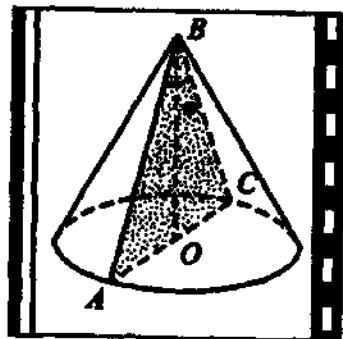


Рис. 212

Указание:

1) $\angle ABC = \varphi$, O — центр основания,
 $OB + BC = a$, $OB = H$, $BC = L$,
 $OC = R$ (рис. 212);

2) $\triangle BOC$, $L = \frac{H}{\cos \frac{\varphi}{2}}$, $L + H = a$,

$$H + \frac{H}{\cos \frac{\varphi}{2}} = a \Rightarrow H = \frac{a \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}, R = H \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}};$$

$$3) V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi a^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{24 \cos^6 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$4. \frac{S \sqrt{S} \sin \alpha}{6 \sqrt{\pi \sin \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$5. \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{24}.$$

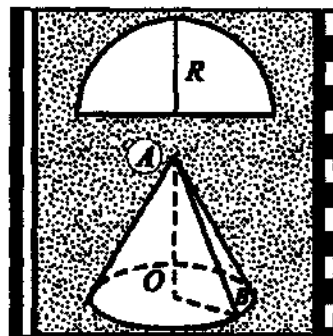


Рис. 213

Указание:

1) O — центр основания, $AB = R$, C — длина окружности (рис. 213);

2) $C = 2\pi R$, $\frac{C}{2} = \pi R$, $\pi R = 2\pi OB$, следовательно, $OB = \frac{R}{2}$;

3) $\triangle AOB$, $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;

$$4) V = \frac{1}{3} \pi OB^2 \cdot OA = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{24}.$$

$$6. \frac{\pi R^3 \sqrt{15}}{3}.$$

$$7. \frac{12\pi l^3}{125}.$$

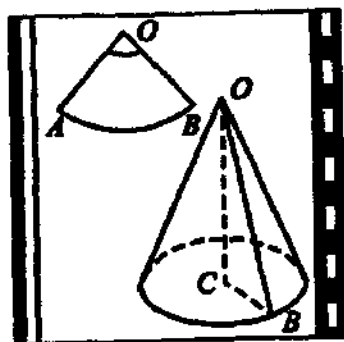


Рис. 214

Указание:

- 1) $\angle AOB = \frac{6\pi}{5}$, $OB = l$, C — центр основания, $CB = R$ (рис. 214);
- 2) $AB = \frac{6\pi l}{5}$, $AB = 2\pi R$, $\frac{6\pi l}{5} = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{3l}{5}$;
- 3) $\triangle OCB$, $OC = \sqrt{OB^2 - CB^2} = \frac{4l}{5}$;
- 4) $V = \frac{1}{3} \pi CB^2 \cdot OC = \frac{12\pi l^3}{125}$.

8. 12.

9. 2:1.

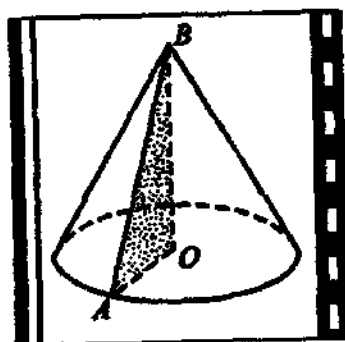


Рис. 215

Указание:

- 1) O — центр основания, $\angle BAO = 60^\circ$;
- 2) $\triangle BOA$, $AB = 2OA$, $S_{осн} = \pi OA^2$,
 $S_{бок} = \pi OA \cdot AB = 2\pi OA^2$;
- 3) $S_{бок} : S_{осн} = 2:1$ (рис. 215).

10. 1:5.

$$11. \frac{\pi a^2 (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

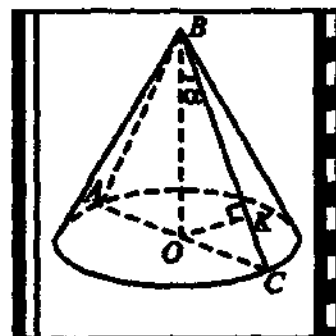


Рис. 216

Указание:

- 1) O — центр основания, $OK \perp BC$, $OK = a$, $\angle OBC = \alpha$ (рис. 216);
- 2) $\triangle OKB$, $BK = OK \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha$;
- 3) $OK^2 = BK \cdot KC \Rightarrow KC = \frac{OK^2}{BK} = a \operatorname{tg} \alpha$;
- 4) $\triangle OKB$, $OB = \frac{OK}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}$;
- 5) $BC = BK + KC = a \operatorname{ctg} \alpha + a \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sin \alpha \cos \alpha}$;

$$6) OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \frac{a}{\cos \alpha};$$

$$7) S_{бок} = \pi OC(OC + BC) = \frac{\pi a^2 (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

$$12. \frac{\pi a^3 \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{6 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$13. \arcsin \left(\frac{P - S}{S} \right).$$

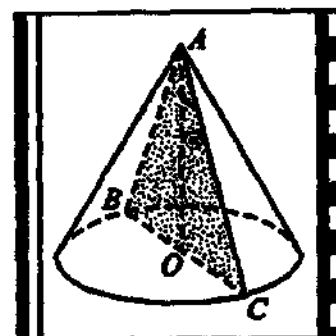


Рис. 217

Указание:

- 1) $OC = x$, $AC = y$, $\pi xy = S$,
 $\pi x(x + y) = P$, $\angle OAC = \alpha$;
- 2) $\pi xy : (\pi x(x + y)) = S : P \Rightarrow$
- 3) $y = \frac{Sx}{P - S}$ (рис. 217);
- 4) $\sin \alpha = \frac{x}{y} = \frac{x}{\frac{Sx}{P - S}} = \frac{P - S}{S}$,
 $\alpha = \arcsin \left(\frac{P - S}{S} \right).$

$$14. \frac{P\sqrt{P \sin \beta \cos \beta}}{3\sqrt{\pi}}.$$

$$15. \frac{9}{16}.$$

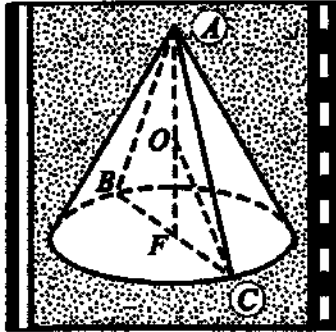


Рис. 218

Указание:

1) O – центр шара и правильного треугольника ABC , $AB = BC = AC = x$ (рис. 218);

$$2) \triangle AFC, AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$AO = \frac{2AF}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{3};$$

$$3) S_{ш} = 4\pi OA^2 = \frac{4\pi x^2}{3};$$

$$4) S_{нов} = \pi \cdot FC \cdot (FC + AC) = \frac{3\pi x^2}{4};$$

$$5) S_{нов} : S_{ш} = \frac{3\pi x^2}{4} : \frac{4\pi x^2}{3} = \frac{9}{16}.$$

$$16. \frac{125V}{32}.$$

$$17. \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

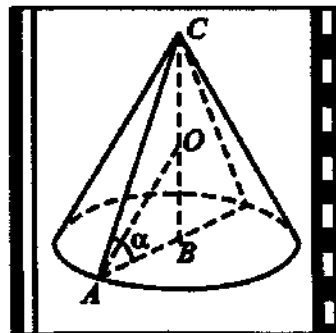


Рис. 219

Указание:

1) O – центр шара, R – его радиус, B – центр основания конуса, $\angle CAB = \alpha$ (рис. 219);

$$2) \triangle OAB, \angle BAO = 2\alpha - \frac{\pi}{2},$$

$$OB = OA \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -R \cos 2\alpha,$$

$$AB = OA \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = R \sin 2\alpha;$$

$$3) V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi AB^2 \cdot CB = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

$$18. \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha (1 - \cos 2\alpha).$$

$$19. \frac{a^6}{2(a^2 - 1)^2}.$$

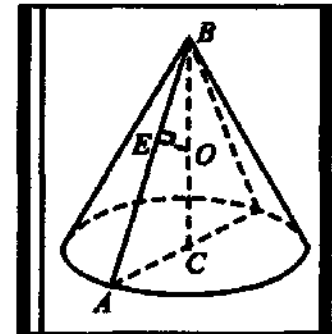


Рис. 220

Указание:

1) O – центр шара, C – центр основания конуса, $BA = L$, $CA = R$, $BC = H$, $OE \perp AB$, $L = aR$ (рис. 220);

2) $\triangle BCA$,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = R\sqrt{a^2 - 1};$$

3) $\triangle BCA \sim \triangle BEO$, $BE : BC = BO : BA$, $\frac{aR}{2} : (R\sqrt{a^2 - 1}) = BO : (aR) \Rightarrow$

$$BO = \frac{a^2 R}{2\sqrt{a^2 - 1}};$$

$$4) V_{ш} = \frac{4}{3} \pi OB^3 = \frac{\pi a^6 R^3}{6\sqrt{(a^2 - 1)^3}};$$

$$5) V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi R^3 \sqrt{a^2 - 1};$$

$$6) V_{ш} : V_{\kappa} = \frac{a^6}{2(a^2 - 1)^2}.$$

$$20. \frac{1}{2} V \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

21. $\frac{7}{25}$.

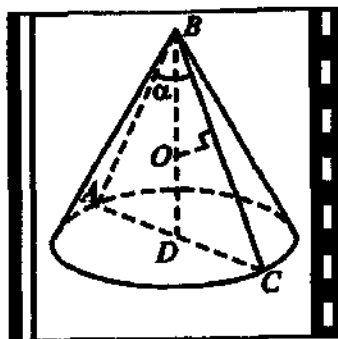


Рис. 221

Указание:

1) O – центр шара, D – центр основания конуса, $S_{осн} = S_{ш}$, $\angle ABC = \alpha$, $OD = r$, $DC = R$ (рис. 221);

2) $S_{осн} = \pi R^2$, $S_{ш} = 4\pi r^2$, $\pi R^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow R = 2r$;

3) $\triangle ODC$, $\angle OCD = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{3}, \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{9},$$

$$5 \cos \frac{\alpha}{2} = 4, 25 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}.$$

22. $\frac{4}{9}, \frac{4}{9}$.

23. $\frac{\pi a^2}{3}$.

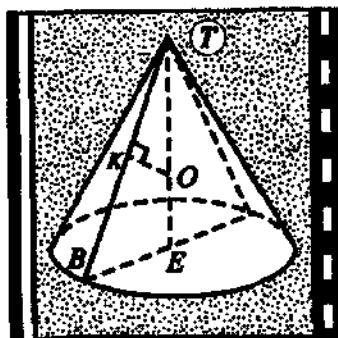


Рис. 222

Указание:

1) $TE = 4OE$, $TB = a$, $OK \perp TB$, K – точка касания (рис. 222);

2) $\triangle ETB \sim \triangle KTO$, $TB : TO = BE : OK$, $a : 3OE = BE : OE$, $BE = \frac{a}{3}$;

3) $S_{бок} = \pi BE \cdot TB = \frac{\pi a^2}{3}$.

24. $\frac{m^2(m-2)}{(m-1)^4}$.

25. $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

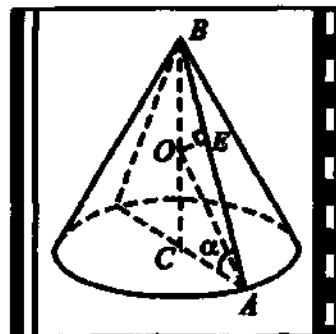


Рис. 223

Указание:

1) $V_k = m \cdot V_{ш}$, C – центр основания конуса, $CA = R$, $\angle BAC = \alpha$, O – центр шара, $OE \perp AB$, $OC = r$ (рис. 223);

2) $\triangle OCA$, $r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

$$V_{ш} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2};$$

3) $\triangle BCA$, $BC = R \operatorname{tg} \alpha$,

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$4) \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \pi R^3 m \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}, 2m \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} - 2m \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = y,$$

$$2my^2 - 2my + 1 = 0, D = 4m^2 - 8m, D \geq 0 \Rightarrow m = 2,$$

$$4y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

26. $\arccos \left(\frac{2n-1 \pm 2\sqrt{n^2-2n}}{4n+1} \right)$.

27. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1-2g}}}{\sqrt{2}}, 0 < g \leq \frac{1}{2}$.

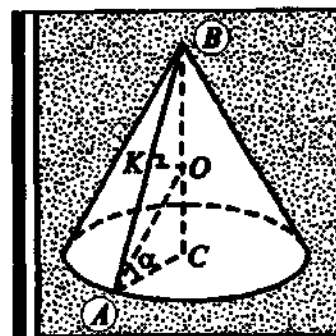


Рис. 224

Указание:

1) $V_{ш} : V_k = g$, C – центр основания конуса, O – центр шара, $\angle BAC = \alpha$, $OK \perp AB$, $OK = OC = R$ – радиус шара;

2) $\triangle BKO$, $OB = \frac{OK}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$ (рис. 224);

3) $\triangle BCA$,

$$BC = OB + OC = \frac{R(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha},$$

$$AC = BC \operatorname{ctg} \alpha = \frac{R(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha};$$

$$4) V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3, V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot BC = \frac{\pi R^3 (1 + \cos \alpha)^3}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha},$$

$$g = \frac{V_{\text{ш}}}{V_{\kappa}} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = y, 2y^2 - 2y + g = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2g}}{2}, \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 2g}) \Rightarrow$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 2g}}{2}}, 0 < g \leq \frac{1}{2}.$$

$$28. 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

$$29. \frac{4\pi l^3 \cos^3 \alpha}{3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

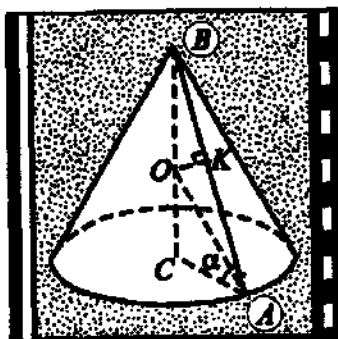


Рис. 225

Указание:

1) C – центр основания конуса, O – центр шара, AB = l, $\angle BAC = \alpha$, $OK \perp AB$, $OC = OK = r$ – радиус вписанного шара (рис. 225);

$$2) \triangle BKO, OB = \frac{OK}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha};$$

$$3) \triangle OCA, CA = OC \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \triangle BKO \sim \triangle BCA, OB : AB = OK : CA, \\ r = \frac{l \cos \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4\pi l^3 \cos^3 \alpha}{3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$30. 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$31. \arccos \frac{1}{3}.$$

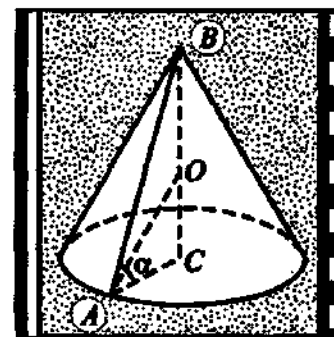


Рис. 226

Указание:

1) $S_{\text{нов.к.}} = 2 \cdot S_{\text{ш}}$, O – центр вписанного шара, C – центр основания конуса, $AC = R$, $OC = r$ – радиус вписанного шара, $\angle BAC = \alpha$;

$$2) \triangle OCA, OC = AC \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \triangle BCA, AB = \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} \text{ (рис. 226);}$$

$$4) S_{\text{нов.к.}} = \pi AC^2 + \pi AC \cdot AB =$$

$$= \frac{\pi R^2 (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}, S_{\text{ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$5) \frac{\pi R^2 (1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} = 8\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

$$32. \frac{\operatorname{tg} \varphi}{4 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

$$33. \frac{b^4}{2(b^2 - 1)}.$$

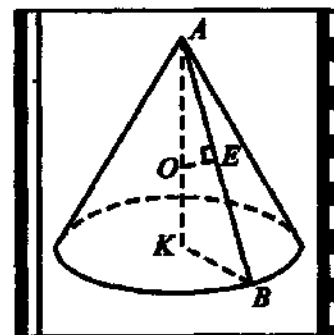


Рис. 227

Указание:

1) O – центр шара, K – центр основания конуса, $OK = r$, $KB = R$, $\frac{R}{r} = b$, $AK = H$, $OE \perp AB$ (рис. 227);

$$2) V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi r^2 b^2 H, V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$V_{\kappa} : V_{\text{ш}} = \frac{b^2 H}{4r};$$

$$3) \triangle AEO \sim \triangle AKB, AO : AB = OE : KB, (H - r) : \sqrt{H^2 + R^2} = r : R \Rightarrow H^2(b^2 - 1) - 2Hb^2r = 0 \Rightarrow H = \frac{2b^2r}{b^2 - 1};$$

$$4) V_K : V_M = \frac{b^4}{2(b^2 - 1)}.$$

$$34. \frac{\pi R^3(k+1)^2}{3(k-1)}.$$

$$35. \frac{\pi}{3}.$$

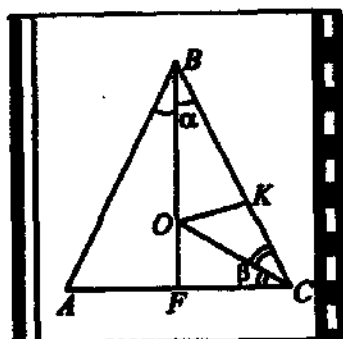


Рис. 228

Указание:

1) $\triangle ABC$ – осевое сечение, O – центр шара, $FC = R$ – радиус основания конуса, $OK = OF = r$ – радиус вписанного шара (рис. 228);

$$2) S_M = 4\pi r^2, S_{осн} = \pi R^2, (4\pi r^2) : (\pi R^2) = S_M : S_{осн} = 4 : 3 \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$3) \triangle OFC, \operatorname{tg} \beta = \frac{r}{R} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6};$$

$$4) \triangle BFC, \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}, \angle ABC = \frac{\pi}{3}.$$

$$36. S = \frac{\pi H^2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}, V = \frac{4\pi H^3 \sin^3 \alpha}{3(1 + \sin \alpha)^3}.$$

$$37. 3.$$

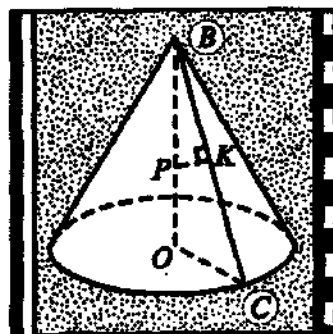


Рис. 229

Указание:

1) P – центр шара, O и K – точки касания, $OB = 8$, $BC = 10$, $OP = PK = x$ – радиус шара (рис. 229);

$$2) \triangle BOC, OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = 6;$$

$$3) BP = OB - x = 8 - x;$$

$$4) \triangle BOC \sim \triangle BKP \Rightarrow OC : BC = PK : BP \Rightarrow 6 : 10 = x : (8 - x), x = 3.$$

$$38. \frac{4}{(1 + \sqrt{2})^3}.$$

$$39. \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

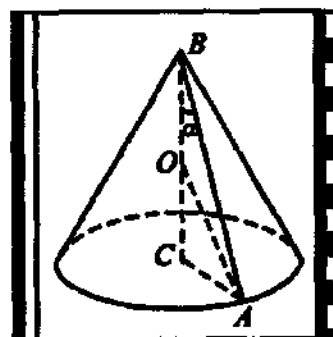


Рис. 230

Указание:

1) O – центр шара, C – центр основания конуса, $AC = R$, $\angle CBA = \alpha$ (рис. 230);

$$2) \triangle BCA, BC = AC \operatorname{ctg} \alpha = R \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$3) \triangle OCA, \angle OAC = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2},$$

$$OC = AC \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$4) V_K = \frac{1}{3} \pi CA^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha, V_M = \frac{4}{3} \pi OC^3 = \frac{4\pi R^3 \cos^3 \alpha}{3(1 + \sin \alpha)^3};$$

$$5) V_K : V_M = \frac{(1 + \sin \alpha)^3}{4 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

$$40. \frac{\pi R^3(1 + \sin \alpha)^3}{3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}.$$

$$41. a \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

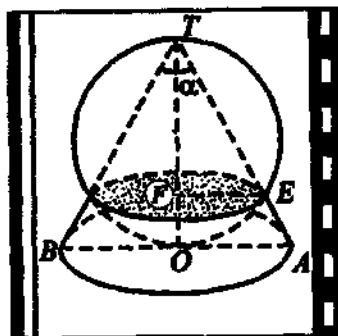


Рис. 231

Указание:

- 1) $TA = a$, $\angle BTA = \alpha$ (рис. 231);
- 2) $\triangle TOA$, $TO = AT \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2}$;
- 3) $\triangle OET$, $\angle OET = 90^\circ$,
 $TE = OT \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;
- 4) $\triangle TFE$,
 $EF = TE \sin \frac{\alpha}{2} = a \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$.

$$42. H \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$43. \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^3}{3 \cos^5 \alpha \sin \alpha}.$$

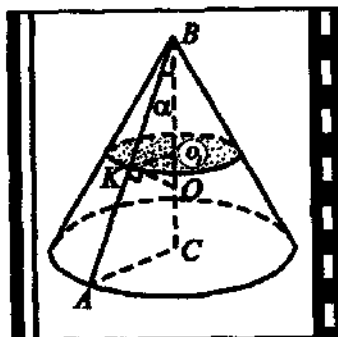


Рис. 232

Указание:

- 1) O – центр шара, C – центр основания конуса, O_1 – центр окружности, $KO_1 = r$, $\angle CBA = \alpha$, $OK \perp AB$;
- 2) $\triangle BO_1K$, $BO_1 = O_1K \operatorname{ctg} \alpha = r \operatorname{ctg} \alpha$;
- 3) $\triangle O_1KO$, $\angle O_1KO = \alpha$, $OO_1 = r \operatorname{tg} \alpha$,
 $OK = OC = \frac{r}{\cos \alpha}$ (рис. 232);
- 4) $BC = BO_1 + OO_1 + OC = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}$;
- 5) $\triangle BCA$, $AC = BC \operatorname{tg} \alpha = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha}$;
- 6) $V = \frac{1}{3} \pi AC^2 BC = \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^3}{3 \cos^5 \alpha \sin \alpha}$.

$$44. -\frac{\pi r^3 \operatorname{tg} 2\alpha}{24 \cos^6 \alpha}.$$

$$45. \frac{45\pi R^2}{4}.$$

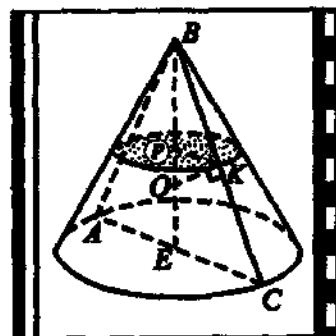


Рис. 233

Указание:

- 1) K , E – точки касания шара, P – центр окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, $OE = OK = R$, $OK \perp BC$, $OE \perp AC$,

$$PK = \frac{3}{5} R, EC = x \text{ (рис. 233);}$$

- 2) $\triangle KPO$,

$$PO = \sqrt{OK^2 - PK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9R^2}{25}} = \frac{4}{5} R;$$

$$3) \triangle BKO, PK^2 = BP \cdot PO, BP = \frac{PK^2}{PO} = \frac{9R}{20};$$

$$4) BE = BP + OP + OE = \frac{9}{4} R;$$

$$5) \triangle BEC \sim \triangle BPK \Rightarrow BE : BP = EC : PK, x = \frac{BE \cdot PK}{BP} = 3R;$$

$$6) \triangle BEC, BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = \frac{15R}{4}, S_{бок} = \pi x BC = \frac{45\pi R^2}{4}.$$

$$46. \arcsin \frac{n-m}{n+m}.$$

$$47. -\frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

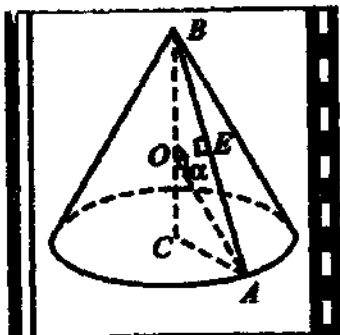


Рис. 234

Указание:

1) O – центр шара, C – центр основания конуса, $OC = R$, $AC = R_1$, $BC = H$, $\angle BOA = \alpha$, $OE \perp AB$ (рис. 234);

2) $\triangle OCA$, $\angle COA = \pi - \alpha$,
 $CA = R \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -R \operatorname{tg} \alpha$;

3) $\triangle BCA \sim \triangle BEO$, $CA : OE = AB : OB$,
 $R_1 : R = \sqrt{R_1^2 + H^2} : (H - R)$,

$$H = \frac{2R \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1};$$

$$4) V = \frac{1}{3} \pi CA^2 \cdot BC = -\frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$48. \frac{\sqrt{S_1(S_2^2 - S_1^2)}}{\pi(S_1 + S_2)}.$$

$$49. \frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

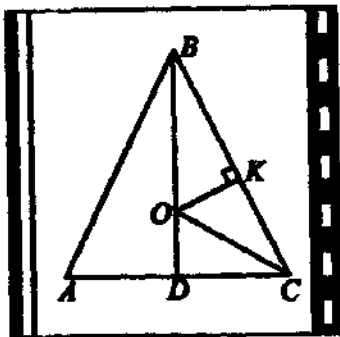


Рис. 235

Указание:

1) O – центр шара, D – центр основания конуса, $OD = R$, $\angle BCD = \alpha$ (рис. 235);

2) $\triangle ODC$, $DC = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

3) $\triangle BDC$, $BC = \frac{DC}{\cos \alpha} = \frac{R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$;

$$4) S_{\text{пол}} = \pi DC^2 + \pi DC \cdot BC = \\ = \frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$50. 3\pi R^3.$$

$$51. \frac{\pi n^2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

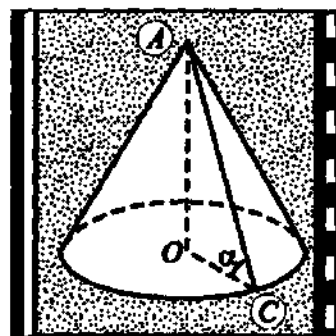


Рис. 236

Указание:

1) O – центр основания, AO – высота конуса, $OC = R$, $AC = x$, $R + x = n$, $\angle OCA = \alpha$ (рис. 236);

2) $\triangle AOC$, $OC = AC \cos \alpha$,
 $R = x \cos \alpha$;

3) $x \cos \alpha + x = n$, $x = \frac{n}{1 + \cos \alpha}$;

$$4) S_{\text{пол}} = \pi R(R + x) = \frac{\pi n^2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$52. \frac{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{S \cos \alpha}}{3\sqrt{2\pi} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$53. \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

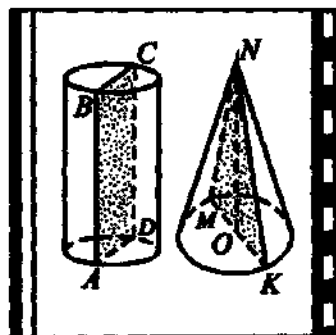


Рис. 237

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = a$, $\triangle MNK$ – правильный, $NK = b$, $S_{ABCD} = S_{MNK}$,
 O – центр основания цилиндра;

2) $S_{ABCD} = a^2$, $S_{MNK} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$,

$$a^2 = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{b\sqrt{3}}{2} \text{ (рис. 237);}$$

3) $\triangle NOK$, $NO = \sqrt{NK^2 - OK^2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$;

$$4) V_{\text{ц}} = \pi DC \cdot \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^3 \sqrt{27}}{32}, V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi OK^2 \cdot ON = \frac{\pi b^3 \sqrt{3}}{24};$$

$$5) V_{\text{ц}} : V_{\text{к}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$54. \frac{9}{4}.$$

55. $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

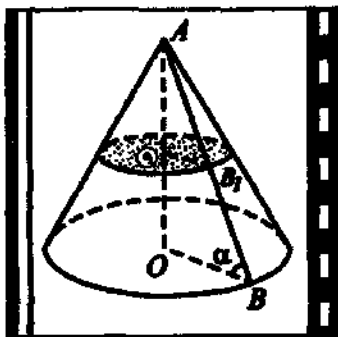


Рис. 238

Указание:

- 1) O – центр основания конуса, O_1 – центр сечения, V_1 – объем отсеченного конуса, $2V_1 = V$, $\angle ABO = \alpha$, $O_1B = R$, $O_1B_1 \parallel OB$, $O_1B_1 = r$, $k = \sqrt[3]{2}$ – коэффициент подобия (рис. 238);
- 2) $\triangle AO_1B_1 \sim \triangle AOB$, $AO = kAO_1 = \sqrt[3]{2}R$;
- 3) $\triangle O_1OB$, $\angle OO_1B = \pi - 2\alpha$,
 $OB = R \sin(\pi - 2\alpha) = R \sin 2\alpha$;

4) $\triangle AOB$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{OB} = \frac{\sqrt[3]{2}R}{R \sin 2\alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

56. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}r$.

57. $\frac{\pi r^2}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}$.

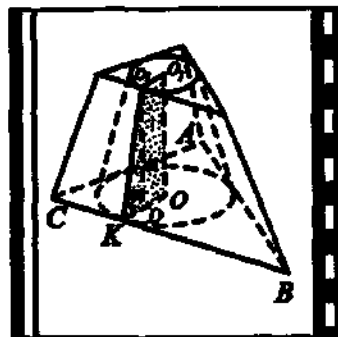


Рис. 239

Указание:

- 1) O , O_1 – центры оснований конуса, ABC – нижнее основание пирамиды, $BK = KC$, $O_1D_1 \parallel OK$, $O_1D_1 = r$, $\angle D_1KO = \alpha$, $DD_1 \parallel OO_1$, $OK = R$, $D_1K = r + R$ (рис. 239);
- 2) $\triangle D_1DK$, $DK = D_1K \cos \alpha = (r + R) \cos \alpha$,
 $DK = R - r$, $R - r = r \cos \alpha + R \cos \alpha$
 $\Rightarrow R = \frac{r(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha}$;

3) $S_{бок} = \pi(R + r)^2 = \frac{\pi r^2}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}$.

58. $\frac{\pi\sqrt{14}}{12}$.

59. $\frac{7}{54} \pi l^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$.

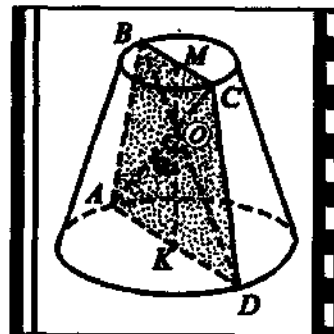


Рис. 240

Указание:

- 1) $ABCD$ – осевое сечение конуса, O – точка пересечения диагоналей сечения, $DO : OB = 2 : 1$, $\angle AOD = \alpha$, $BD = l$, $OM \perp BC$, $OK \perp AD$ (рис. 240);
- 2) $\triangle OKD$, $OK = OD \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l \cos \frac{\alpha}{2}$,
 $KD = OD \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l \sin \frac{\alpha}{2}$;
- 3) $\triangle OMB$, $OM = OB \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l \cos \frac{\alpha}{2}$,
 $BM = OB \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l \sin \frac{\alpha}{2}$;

4) $MK = OK + OM = l \cos \frac{\alpha}{2}$;

5) $V = \frac{1}{3} \pi MK \cdot (KD^2 + KD \cdot MC + MC^2) = \frac{7}{54} \pi l^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}$.

60. $\frac{1}{12} \pi \sin \alpha (1 + 2 \sin^2 \alpha)$.

61. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

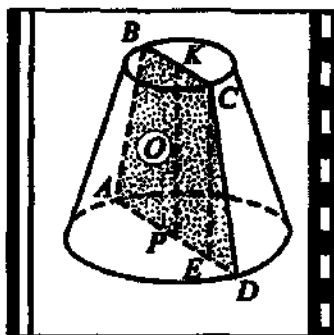


Рис. 241

Указание:

- 1) O – центр шара, $ABCD$ – осевое сечение конуса, $OP \perp AD$, $OK \perp BC$, $CE \parallel KP$, $CD = 10$, $\angle CDE = 45^\circ$;
- 2) $\triangle CED$, $CE = CD \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$;
- 3) $OP = \frac{PK}{2} = \frac{CE}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (рис. 241);
- 4) $V_{ш} = \frac{4}{3} \pi OP^3 = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

62. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.

63. $\pi h^2\sqrt{6}$.

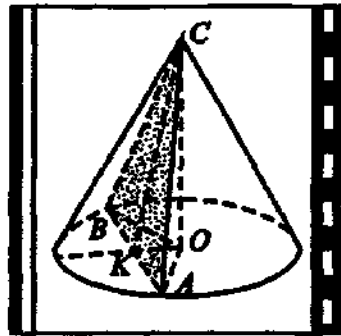


Рис. 242

Указание:

1) O – центр основания конуса,
 $OA = OB = R$, $AC \perp CB$, $OC = h$,
 $CK \perp AB$ (рис. 242);

2) $\triangle AOB$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$;

3) $\triangle OKB$, $\angle KOB = 60^\circ$, $\angle KBO = 30^\circ$
 $\Rightarrow OK = \frac{R}{2}$, $KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$;

4) $\triangle CKB$, $\angle CBK = 45^\circ$, $CK = KB$, $CB = \sqrt{2} KB^2 = \frac{R\sqrt{6}}{2}$;

5) $\triangle COB$, $CB = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{h^2 + R^2}$;

6) $\frac{R\sqrt{6}}{2} = \sqrt{h^2 + R^2} \Rightarrow R = h\sqrt{2} \Rightarrow CB = h\sqrt{3}$;

7) $S_{бок} = \pi OB \cdot CB = \pi h^2\sqrt{6}$.

64. $\frac{1}{2} \arccos(\sqrt{3} - 1)$.

65. $\frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha \cos^2 \varphi}$.

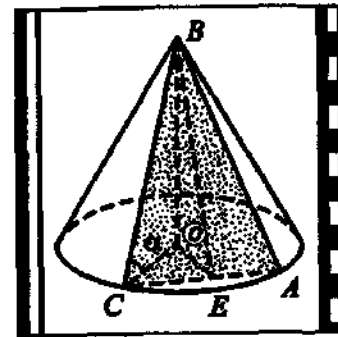


Рис. 243

Указание:

1) O – центр основания конуса,
 $OC = OA = R$, $\angle BCO = \alpha$, $BE \perp AC$,
 $\angle EBO = \varphi$ (рис. 243);

2) $\triangle BOC$, $BO = OC \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \alpha$,

$$BC = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha};$$

3) $\triangle BOE$, $BE = \frac{BO}{\cos \varphi} = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}$;

4) $\triangle BEC$, $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \frac{R \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha \cos \varphi}$;

5) $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha \cos^2 \varphi}$.

66. 24.

67. $\frac{\pi d^3 (4 \cos^2 \varphi - 1)}{3 \cos^3 \varphi}$.

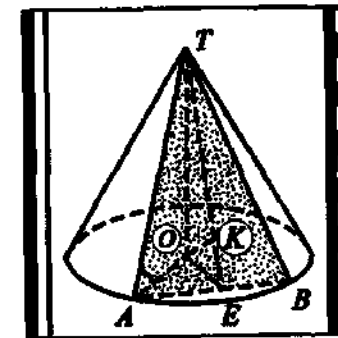


Рис. 244

Указание:

1) $BE = EA$, $OK \perp TE$, $OK = d$,
 $\angle OET = \varphi$, $TA = 2d$ (рис. 244);

2) $\triangle OKE$, $OE = \frac{OK}{\sin \varphi} = \frac{d}{\sin \varphi}$;

3) $\triangle TOE$, $OT = OE \operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{\cos \varphi}$;

4) $\triangle TOA$,

$$OA = \sqrt{TA^2 - TO^2} = \frac{d \sqrt{4 \cos^2 \varphi - 1}}{\cos \varphi};$$

5) $V = \frac{1}{3} \pi OA^2 \cdot TO = \frac{\pi d^3 (4 \cos^2 \varphi - 1)}{3 \cos^3 \varphi}$.

$$68. \frac{l \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}}{\cos \beta (1 + \sin \alpha)}$$

$$69. \frac{h^2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta}}{\sin \beta}$$

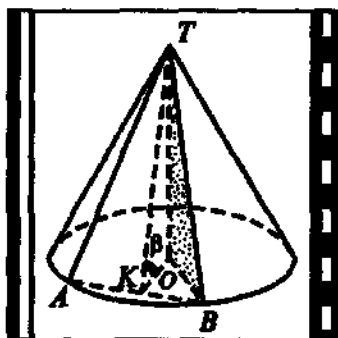


Рис. 245

Указание:

$$1) TO = h, \angle OTB = \alpha, AK = KB, \angle OKT = \beta \text{ (рис. 245);}$$

$$2) S_{TAB} = \frac{1}{2} AB \cdot TK;$$

$$3) \triangle TOB, OB = h \operatorname{tg} \alpha;$$

$$4) \triangle TOK, KO = h \operatorname{ctg} \beta, KT = \frac{h}{\sin \beta};$$

$$5) \triangle OKB, KB = \sqrt{OB^2 - KO^2} = h \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

$$6) S_{ATB} = \frac{h^2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta}}{\sin \beta}.$$

$$70. \frac{\sin \alpha}{4\pi \cos \beta \cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$71. 4\pi, 2\pi\sqrt{13}.$$

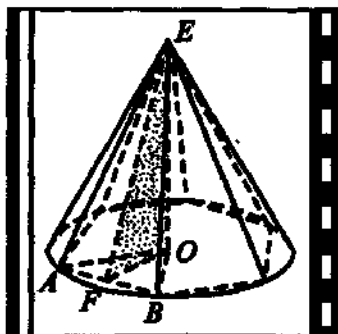


Рис. 246

Указание:

$$1) AB = 2, AF = FB, O - \text{центр основания конуса, } \angle EFO = \frac{\pi}{3};$$

$$2) \triangle AOB, OB = OA = 2, \angle OBF = 60^\circ, OF = OB \sin 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$3) \triangle EOF, OE = OF \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 3,$$

$$EF = \frac{OF}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3};$$

$$4) V = \frac{1}{3} \pi OB^2 \cdot OE = 4\pi \text{ (рис. 246);}$$

$$5) \triangle EFB, BE = \sqrt{EF^2 + FB^2} = \sqrt{13};$$

$$6) S_{бок} = \pi OB \cdot BE = 2\pi\sqrt{13}.$$

$$72. \frac{\pi R^2 H}{12}.$$

$$73. \frac{1}{4} \pi a(a + 2m).$$

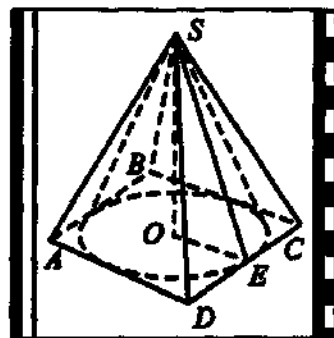


Рис. 247

Указание:

$$1) AB = BC = a, O - \text{центр основания конуса, } DE = EC, SE = m;$$

$$2) OE = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2} \text{ (рис. 247);}$$

$$3) S_{пол} = \pi OE^2 + \pi OE \cdot SE = \frac{1}{4} \pi a(a + 2m).$$

$$74. 14.$$

$$75. \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

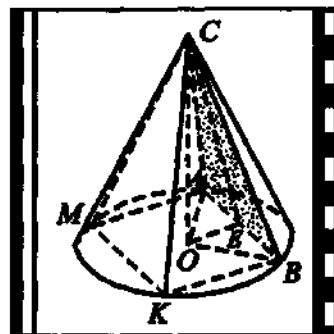


Рис. 248

Указание:

$$1) ABKM - \text{квадрат, } AB = a, \angle ACB = \alpha, O - \text{центр основания (рис. 248);}$$

$$2) \triangle MKB, MB = \sqrt{MK^2 + KB^2} = a\sqrt{2},$$

$$OB = \frac{1}{2} MB = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$3) \triangle CEB, EB = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2},$$

$$CB = \frac{EB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) \Delta COB, CO = \sqrt{CB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{\cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

$$5) V = \frac{1}{3} \pi OB^2 \cdot OC = \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$76. \frac{2l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha}{3 \sin \beta}.$$

$$77. \frac{\sqrt[3]{12Q\sqrt{-2\cos \alpha}}}{\pi \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

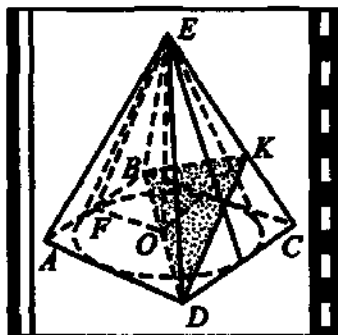


Рис. 249

Указание:

1) $V_K = Q$, O — центр основания конуса,
 $DK \perp EC$, $OF \perp AB$, $\angle BKD = \alpha$,
 $AD = x$, $OE = H$ (рис. 249);

2) ΔDAB , $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = x\sqrt{2}$,
 $OD = \frac{1}{2} BD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$;

3) ΔKOD , $DK = \frac{OD}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;

$$4) OF = \frac{1}{2} AD = \frac{x}{2}, V_K = \frac{1}{3} \pi OF^2 \cdot OE = \frac{\pi x^2 H}{12}, Q = \frac{\pi x^2 H}{12}, H = \frac{12Q}{\pi x^2};$$

$$5) \Delta EOF, EF^2 = OE^2 + OF^2 = \frac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \frac{x^2}{4};$$

$$6) \Delta EOC, EC^2 = OE^2 + OC^2 = \frac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \frac{x^2}{2};$$

$$7) EF^2 \cdot AB^2 = EC^2 \cdot DK^2, x^2 \left(\frac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \frac{x^2}{4} \right) = \frac{x^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{144Q^2}{\pi^2 x^4} + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{12Q\sqrt{-2\cos \alpha}}{\pi \cos \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$78. \frac{\pi h^3 (1 - \cos \alpha)}{3 \cos \alpha}.$$

$$79. \frac{1}{6} r^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$

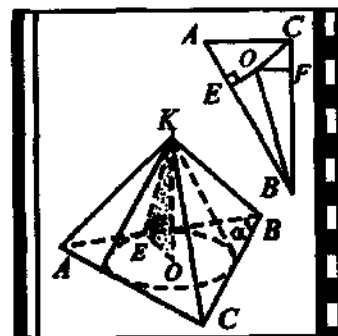


Рис. 250

Указание:

1) O — центр основания конуса. $OE \perp AB$,
 $OE = r$, $\angle KEO = \varphi$, $\angle BCA = 90^\circ$,
 $\angle ABC = \alpha$, $OF \perp BC$ (рис. 250);

2) ΔKOE , $OK = OE \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \varphi$;

3) ΔABC , $OF = FC = r$ (т. к. $\angle OCF = 45^\circ$),

$$BF = OF \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$BC = BF + FC = r \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$AC = BC \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2;$$

$$4) V_n = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OK = \frac{1}{6} r^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2.$$

$$80. \frac{\pi a^2 \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}{24}, \frac{\pi a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{108}.$$

$$81. \frac{2V \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}.$$

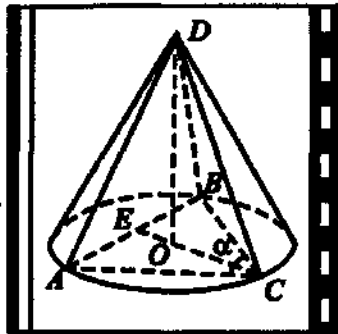


Рис. 251

Указание:

1) $V_k = V$, $AC = CB$, $\angle ACB = \alpha$, O – центр основания конуса, $AE = EB$, $AC = x$ (рис. 251);

2) $\triangle AEC$, $AE = AC \sin \frac{\alpha}{2} = x \sin \frac{\alpha}{2}$,
 $AB = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$;

3) $\triangle ABC$,
 $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \alpha = \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha$,

$$OC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{x}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) V_k = \frac{1}{3} \pi OC^2 \cdot OD \Rightarrow OD = \frac{3V}{\pi OC^2} = \frac{12V \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi x^2};$$

$$5) V_{\text{нпр}} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OD = \frac{2V \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\pi}.$$

$$82. \frac{\pi a^3 \sqrt{13}}{12}.$$

$$83. 2\pi : \sin 2\alpha.$$

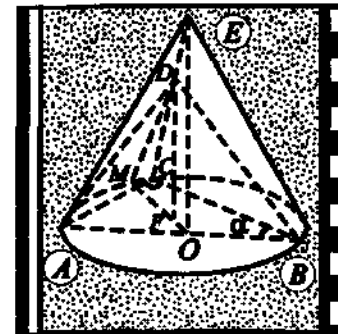


Рис. 252

Указание:

1) O – центр основания конуса, $\angle ACB = 90^\circ$, $AO = OB$, $\angle CBA = \alpha$, $OA = R$, $OE = H$, $MD = DE$, $DF \perp MO$;

2) $\triangle EOM$, $DF = \frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} H$ (рис. 252);

3) $\triangle ABC$, $BC = AB \cos \alpha = 2R \cos \alpha$,
 $AC = AB \sin \alpha = 2R \sin \alpha$;

$$4) V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

$$V_{\text{нпр}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot DF = \frac{1}{6} H R^2 \sin 2\alpha;$$

$$5) V_k : V_{\text{нпр}} = 2\pi : \sin 2\alpha.$$

$$84. \frac{a(2 + \sqrt{4 - \sqrt{3}})}{\sqrt{3}}.$$

$$85. \frac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}.$$

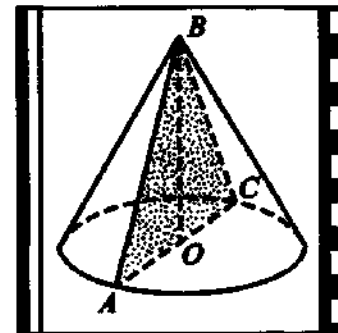


Рис. 253

Указание:

1) O – центр основания конуса, $OC = R$, $S_{\text{бок}} = 3\pi S_{ABC}$, $OB = H$ (рис. 253);

2) $S_{\text{бок}} = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$, $S_{ABC} = RH \Rightarrow$
 $\pi R \sqrt{H^2 + R^2} = RH 3\pi \Rightarrow H = \frac{R}{\sqrt{8}};$

$$3) V = \frac{1}{3} \pi OC^2 \cdot OB = \frac{\pi R^3}{6\sqrt{2}}.$$

$$86. \frac{1}{3} \pi m^2 l^3 \sqrt{1 - m^2}.$$

87. $\frac{5a}{9}, \frac{4a}{9}$.

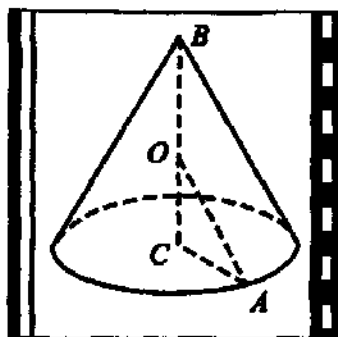


Рис. 254

Указание:

- 1) C – центр основания конуса, O – центр шара, $OA = R$, $BC = H$, $R + H = a$ (рис. 254);
- 2) $\triangle OCA$, $OC = H - R$,
 $AC^2 = OA^2 - OC^2 = H(2R - H)$;
- 3) $2R + 2H = 2a$, $2R - H + 3H = 2a \Rightarrow$
 $2R - H = 2a - 3H \Rightarrow AC^2 = 2aH - 3H^2$;
- 4) $V_K = \frac{1}{3} \pi AC^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi (2aH^2 - 3H^3)$,

$$V_K' = \frac{1}{3} \pi (4aH - 9H^2), V_K' = 0 \Rightarrow H = \frac{4a}{9}, R = \frac{5a}{9}.$$

88. $\frac{4}{3} R$.

89. $\frac{2}{3} R$.

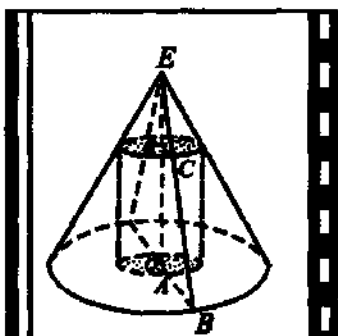


Рис. 255

Указание:

- 1) O, K – центры оснований цилиндра, $EO = h$, $OB = R$, $OA = r$, $EK = h'$ (рис. 255);
- 2) $\triangle EKC \sim \triangle EOB$, $EK : EO = KC : OB$,
 $h' : h = r : R \Rightarrow h' = \frac{hr}{R}$;
- 3) $OK = OE - EK = h - h' = \frac{h(R - r)}{R}$;
- 4) $V_K = \pi OA^2 \cdot OK = \frac{\pi r^2 h(R - r)}{R}$,

$$V_K' = 2\pi hr - \frac{3\pi hr^2}{R}, V_K' = 0, \frac{r(2\pi hR - 3\pi hr)}{R} = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} R.$$

90. $\frac{R}{2}$.

91. $16\pi \text{ дм}^3, 54\pi \text{ дм}^3$.

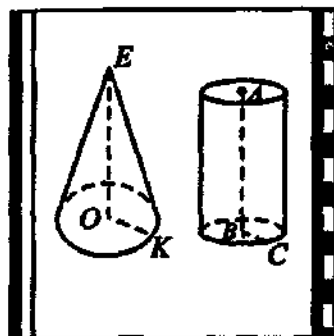


Рис. 256

Указание:

- 1) O – центр основания конуса, A и B – центры оснований цилиндра, $OK = R$, $OE = H$, $EK = l$, $l = R + 1$,
 $S_{\text{пов.к.}} = S_{\text{бок.ц.}}$, $BC = R - 1$ (рис. 256);
- 2) $S_{\text{пов.к.}} = \pi OK^2 + \pi OK \cdot EK = 2\pi R^2 + \pi R$;
- 3) $S_{\text{бок.ц.}} = 2\pi BC \cdot AB = 4\pi(R - 1)^2$;
- 4) $\pi R(2R + 1) = 4\pi(R - 1)^2 \Rightarrow R = 4 \text{ дм}$,
 $l = 5 \text{ дм}$, $H = 3 \text{ дм}$;
- 5) $V_K = \frac{1}{3} \pi R^2 H = 16\pi \text{ дм}^3$;
- 6) $V_{\text{ц.}} = 2\pi(R - 1)^3 = 54\pi \text{ дм}^3$.

92. $240\pi \text{ дм}^3$.

93. $1456\pi \text{ см}^3$.

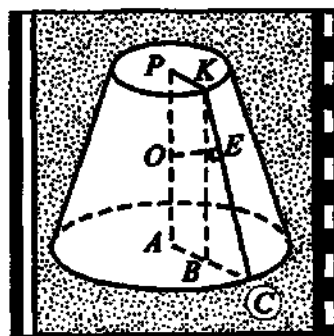


Рис. 257

Указание:

- 1) O – центр шара, A и P – центры оснований конуса, $OE \perp KC$, $KB \perp AC$,
 $PK = r$, $AC = R$, $OA = OE = OP = 6 \text{ см}$, $S_{\text{бок}} = 400\pi \text{ см}^2$ (рис. 257);
- 2) $AP = 2 \cdot OA = 12 \text{ см}$, $PK = KE = r$,
 $AC = EC = R$,
 $KC = KE + EC = r + R$;
- 3) $S_{\text{бок}} = \pi(AC + PK) \cdot KC$, $400\pi =$
 $= \pi(R + r)^2 \Rightarrow R + r = 20 \text{ см}$, $KC = 20 \text{ см}$;
- 4) $\triangle KBC$, $BC = AC - PK = R - r$, $BC = \sqrt{KC^2 - BK^2} \Rightarrow$
 $R - r = 16 \text{ см}$;
- 5) $\begin{cases} R + r = 20 \\ R - r = 16 \end{cases} \Rightarrow R = 18 \text{ см}, r = 2 \text{ см}$;
- 6) $V = \frac{1}{3} \pi AP(AC^2 + PK \cdot AC + PK^2) = 1456\pi \text{ см}^3$.

94. $\pi R h \sqrt{3}$.

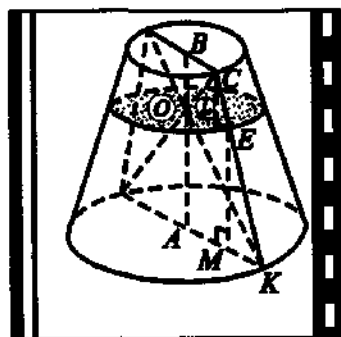
95. $228\pi \text{ см}^3$, $2268\pi \text{ см}^3$.

Рис. 258

Указание:

- 1) O – центр основания сечения, A и B – центры оснований конуса, $OE = r$, $CL \perp OE$, $EM \perp AK$, $BC = 6 \text{ см}$,

$$AK = 18 \text{ см}, S_{\text{бок}} = 480\pi \text{ см}^2 \text{ (рис. 258);}$$

- 2) $S_{\text{бок}} = \pi(BC + AK) \cdot CK$,
 $480\pi = \pi(6 + 18) \cdot CK \Rightarrow CK = 20 \text{ см};$

$$3) AB = \sqrt{CK^2 - (AK - BC)^2} = 16 \text{ см};$$

$$4) \triangle OBC \sim \triangle OAK, OB : OA = BC : AK = 1 : 3;$$

- 5) $\triangle CLE \sim \triangle EMK$, $CL : EM = LE : MK$, $1 : 3 = (r - 6) : (18 - r)$
 $\Rightarrow r = 9 \text{ см};$

$$6) V_1 = \frac{1}{3} \pi OB(OE^2 + BC^2 + OE \cdot BC) = 228\pi \text{ см}^3,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi OA(OE^2 + AK^2 + OE \cdot AK) = 2268\pi \text{ см}^3.$$

96. 62 : 109.

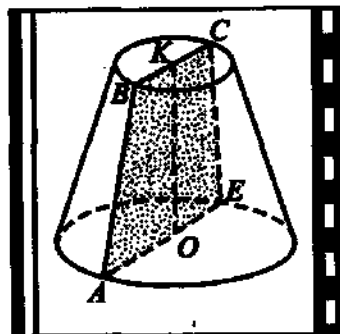
99. $756\pi \text{ см}^3$.

Рис. 259

Указание:

- 1) O и K – центры оснований конуса, $OE = R$, $KC = r$, $r : R = 1 : 4 \Rightarrow R = 4r$, $P_{ABCE} = 60 \text{ см}$ (рис. 259);

$$2) P_{ABCE} = 2AB + BC + AE,$$

$$60 = 2AB + 10r \Rightarrow AB = 30 - 5r;$$

$$3) S_{\text{бок}} = \pi(OE + KC) \cdot AB = 25\pi(6r - r^2),$$

$$S'_{\text{бок}} = 25\pi(6 - 2r), S'_{\text{бок}} = 0 \Rightarrow$$

$$r = 3 \text{ см}, R = 12 \text{ см}, AB = 15 \text{ см};$$

$$4) KO = \sqrt{AB^2 - (AO - BK)^2} = 12 \text{ см};$$

$$5) V = \frac{1}{3} \pi KO \cdot (KC^2 + OE^2 + KC \cdot OE) = 756\pi \text{ см}^3.$$

$$100. \arccos \frac{4}{5}.$$

6

Сфера. Шар



6. СФЕРА. ШАР

6.1 Формулы, задачи

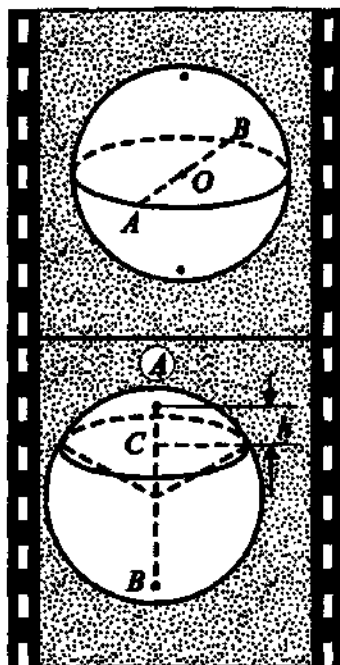


Рис. 260

1. Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии R от данной точки O .

Данная точка O называется центром сферы, а данное расстояние R – радиусом сферы.

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы.

Отрезок $AB = 2R$, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы (рис. 260).

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

2. Шар. Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не превосходящем данного R , от некоторой фиксированной точки O , называемой центром шара.

Данное расстояние R называется радиусом шара.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. Шаровой сегмент. Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. Любая плоскость рассекает шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется основанием каждого из этих сегментов, а длины отрезков CA и CB диаметра AB , перпендикулярного секущей плоскости, называются высотами сегментов.

Если высота сегмента равна h , а радиус шара равен R , то объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right),$$

а площадь

$$S = 2\pi R h.$$

4. Шаровой слой. Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются основаниями шарового слоя, а расстояние между плоскостями – высотой шарового слоя.

5. Шаровой сектор. Шаровым сектором называется тело, состоящее из суммы или разности шарового сегмента и конуса с вершиной в центре шара, имеющих общее основание: сумма, если шаровой сегмент меньше полушара, разность, если больше.

Если радиус шара равен R , а высота шарового сегмента равна h , то объем V шарового сектора вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Задача 1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади $144\pi \text{ см}^2$ и $25\pi \text{ см}^2$. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17 см.

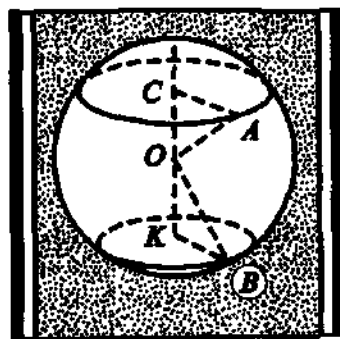


Рис. 261

Решение. Пусть CA и KB - радиусы сечений шара, точка O - центр шара. Для определенности будем считать, что $CA > KB$ (рис. 261). По условию задачи $\pi CA^2 = 144\pi$, $\pi KB^2 = 25\pi$, $CK = 17$ см. Обозначим CO через x . Тогда $OK = 17 - x$. Так как $OA = OB$ (радиусы шара), то $\sqrt{CA^2 + OC^2} = \sqrt{OK^2 + KB^2}$, или $\sqrt{12^2 + x^2} = \sqrt{(17 - x)^2 + 5^2}$.

Отсюда находим $x = 5$ см. Радиус шара $OA = \sqrt{CA^2 + OC^2} = 13$ см. Полная поверхность шара $S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 169 = 676\pi$ см².

Задача 2. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12 см. Найдите радиус шара, если площади сечений равны 100π см² и 64π см².

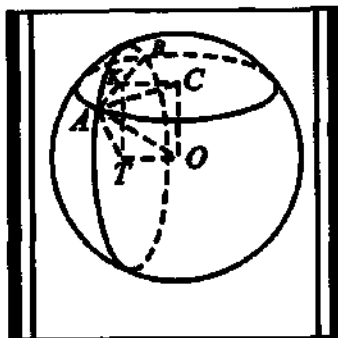


Рис. 262

Решение. Из условия следует, что радиусы сечений $CA = 10$ см, $TA = 8$ см. Пусть точка O - центр шара, а точка K - середина общей хорды $AB = 12$ см (рис. 262). В прямоугольном треугольнике AKC ($\angle AKC = 90^\circ$, $AK = 6$ см, $CA = 10$ см) катет

$$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см.}$$

Из прямоугольного треугольника ATO ($\angle ATO = 90^\circ$, $TA = 8$ см, $TO = CK = 8$ см)

$$\begin{aligned} \text{находим радиус шара } OA &= \sqrt{TA^2 + TO^2} = \\ &= \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} \text{ см.} \end{aligned}$$

Задача 3. Диаметр шара разделен на три части в отношении 1 : 3 : 2 и через точки деления проведены перпендикулярные ему плоскости. Найдите площадь поверхности шара, если сумма площадей сечений равна 52π см².

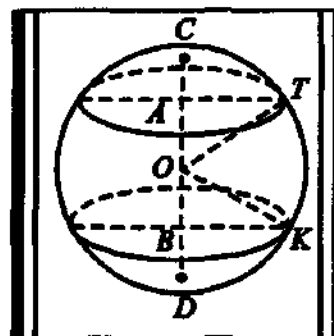


Рис. 263

Решение. Пусть радиус сферы $R = OT = OK$, а радиусы сечений $R_1 = AT$ и $R_2 = BK$ (рис. 263). В прямоугольном треугольнике OAT ($\angle OAT = 90^\circ$, $OA = \frac{2R}{3}$)

$$R_1^2 = AT^2 = OT^2 - OA^2 = \frac{5R^2}{9}. \text{ В треугольнике } OBK \text{ } (\angle OBK = 90^\circ, OB = \frac{R}{3})$$

$$R_2^2 = BK^2 = OK^2 - OB^2 = \frac{8R^2}{9}. \text{ По условию } 52\pi = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \frac{13R^2\pi}{9}.$$

Отсюда находим $R^2 = 36$ см². Следовательно, площадь поверхности шара $S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 = 144\pi$ см².

Задача 4. В основании пирамиды равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a , а угол при основании α . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Найдите площадь поверхности вписанной в пирамиду сферы.

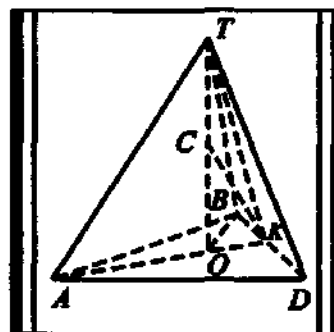


Рис. 264

Решение. Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то ортогональная проекция вершины пирамиды совпадает с центром O вписанной в треугольник ABD ($AB = AD = a$, $\angle ABD = \alpha$) окружности (рис. 264). Пусть точка K - середина стороны BD , тогда центр C вписанной в пирамиду сферы есть точка пересечения высоты TO и биссектрисы угла AKT ($\angle AKT = \varphi$).

В прямоугольном треугольнике AKB ($\angle AKB = 90^\circ$, $AB = a$, $\angle ABK = \alpha$) катет $BK = AB \cos \alpha = a \cos \alpha$. Из треугольника BKO ($\angle BKO = 90^\circ$, $BK = a \cos \alpha$, $\angle KBO = \frac{\alpha}{2}$) находим $OK = BK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} =$

$= a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. В треугольнике COK ($\angle COK = 90^\circ$, $OK = a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\angle CKO = \frac{\varphi}{2}$) катет $CO = OK \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = a \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Так как отрезок CO равен радиусу R вписанной в пирамиду сферы, то площадь поверхности сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$.

Задача 5. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{6}$ см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

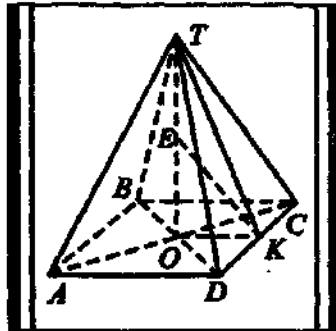


Рис. 265

Решение. Пусть $TABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, точка K – середина отрезка DC . Тогда $AC = 4\sqrt{6}$ см, $\angle OKT = 60^\circ$. Центр E вписанного в пирамиду шара есть точка пересечения высоты TO и биссектрисы угла OKT . Из равенства $AC^2 = 2DC^2$ находим $DC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$ см, $OK = \frac{DC}{2} = 2\sqrt{3}$ см. В

прямоугольном треугольнике EOK ка-

тет $OE = OK \operatorname{tg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$ (см).

Объем шара $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi OE^3 = \frac{32}{3} \pi \text{ см}^3$ (рис. 265).

Задача 6. В правильную треугольную пирамиду вписан шар, центр которого делит высоту пирамиды в отношении 5 : 4, считая от вершины. Найдите объем шара, если сторона основания пирамиды равна $12\sqrt{3}$ см.

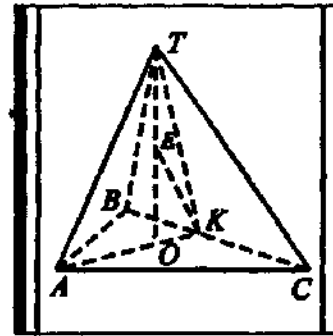


Рис. 266

Решение. Пусть $TABC$ – правильная треугольная пирамида. Основание высоты, проведенной из вершины T , совпадает с центром O треугольника ABC ($AB = 12\sqrt{3}$ см), а центр E вписанного в пирамиду шара есть точка пересечения высоты TO и биссектрисы угла AKT , где точка K – середина ребра BC . По условию $TE : EO = 5 : 4$ (рис. 266).

Из прямоугольного треугольника AKC ($\angle AKC = 90^\circ$, $AC = 12\sqrt{3}$ см, $KC = 6\sqrt{3}$ см) находим катет $AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{144 \cdot 3 - 36 \cdot 3} = 18$ (см). $OK = \frac{AK}{3} = 6$ см. Так как

EK – биссектриса, то $OK : TK = OE : ET$. Отсюда находим $TK = \frac{15}{2}$ см. В прямоугольном треугольнике $ТОК$ ($\angle ТОК = 90^\circ$, $OK = 6$ см, $TK = \frac{15}{2}$ см) катет $TO = \sqrt{TK^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - 36} = \frac{9}{2}$ (см). $OE = \frac{4}{9} TO = 2$ см. Объем шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi OE^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ см}^3$.

Задача 7. Около правильной четырехугольной пирамиды описана сфера. Найдите ее площадь, если сторона основания равна $4\sqrt{2}$ см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° .

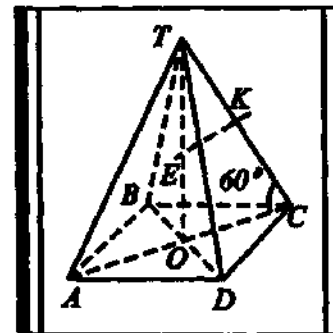


Рис. 267

Решение. Центр E сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды $TABCD$, совпадает с точкой пересечения высоты TO и серединного перпендикуляра к боковому ребру (например, к ребру TC). $TK = KC$, $KE \perp TC$ (рис. 267). По условию $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle TCO = 60^\circ$.

Из прямоугольного треугольника ADC

находим $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{32 + 32} = 8$ (см). $OC = \frac{AC}{2} = 4$ см.
 Так как $\angle OTC = 30^\circ$, то $TC = 2OC = 8$ см. Следовательно, треугольник ATC равносторонний и $TE = \frac{2}{3}TO = \frac{2}{3}\sqrt{TC^2 - OC^2} =$
 $= \frac{2}{3}\sqrt{64 - 16} = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (см).

Площадь поверхности сферы $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi TE^2 = \frac{256}{3}\pi \text{ см}^2$.

6.2. Задачи

1. Сечения сферы двумя параллельными плоскостями имеют длины 10π и 24π см. Найдите площадь поверхности сферы, если расстояние между плоскостями равно 7 см и центры сечений лежат на одном радиусе.
2. Радиусы сечений сферы двумя взаимно перпендикулярными плоскостями равны R_1 и R_2 . Найдите площадь сферы, если сечения имеют единственную общую точку.
3. Площадь большого круга шара равна $50\pi \text{ см}^2$. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскостей сечения, если площадь одного из них $25\pi \text{ см}^2$.
4. Точки A, B, C лежат на сфере. Расстояния между ними равны 5 см, 7 см и 8 см. Плоскость, проходящая через эти точки, отстоит от центра сферы на расстоянии, равном $\frac{7}{3}$ см. Найдите радиус сферы.
5. Шар, радиус которого равен 41 см, пересечен плоскостью на расстоянии 9 см от центра. Определите площадь сечения.

6. На поверхности сферы даны три точки. Расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус сферы равен 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти три точки.
7. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$. Ребра пирамиды наклонены под равными углами α к плоскости основания. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.
8. Радиус сферы равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найдите ее кратчайшее расстояние от сферы.
9. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Сфера касается всех его сторон. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости ромба, если радиус сферы равен 10 см.
10. Шар, радиус которого 7 см, касается всех сторон ромба. Определите, на каком расстоянии находится центр шара от плоскости ромба, если от вершин ромба он удален на 9 см и 11 см.
11. Сфера касается всех сторон равнобедренного треугольника, которые равны 15 см, 15 см и 24 см. Расстояние от центра шара до вершины большего из углов треугольника равно 13 см. Определите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.
12. В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения, площади которых равны $49\pi \text{ см}^2$ и $400\pi \text{ см}^2$, а расстояние между ними равно 9 см. Определите площадь поверхности шара.
13. В шар вписана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой равна a . Найдите объем шара, если высота пирамиды равна стороне ее основания.
14. В шар вписан конус, радиус основания которого равен a . Найдите площадь поверхности шара, если высота конуса равна радиусу его основания.

15. Плоские углы при вершине правильной треугольной пирамиды $TABC$ прямые. Площадь боковой грани равна 2 см^2 . Найдите площадь сферы, вписанной в данную пирамиду.
16. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, если площади боковых граней равны 3 см^2 , 4 см^2 и 12 см^2 .
17. Диаметр шара разделен на три равные части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные к диаметру. Найдите объем получившегося шарового слоя, если радиус шара равен R .
18. Найдите объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 4 см , а радиус шара равен 5 см .
19. Объем конуса равен $96\pi \text{ см}^3$, а радиус его основания равен 6 см . Найдите объем шара, вписанного в данный конус.
20. В пирамиду, основанием которой является ромб со стороной a и углом α вписан шар. Найдите объем шара, если каждая боковая грань пирамиды составляет с плоскостью основания угол β .
21. В шар вписан конус, радиус основания которого равен r , а высота равна H . Найдите площадь поверхности шара.
22. Около шара, радиус которого равен 5 см , описана правильная четырехугольная пирамида. Расстояние от центра шара до бокового ребра пирамиды равно 7 см . Определите поверхность сферы, диаметром которой является высота данной пирамиды.
23. Шар описан около цилиндра. Найдите площадь поверхности шара, если высота цилиндра $2\sqrt{7} \text{ см}$, а сторона правильного треугольника, вписанного в его основание, равна $3\sqrt{3} \text{ см}$.
24. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определите площадь поверхности шара, если расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a , а до бокового ребра равно b .

25. Около правильной треугольной пирамиды описана сфера радиуса 9 см , центр которой совпадает с центром сферы, вписанной в эту пирамиду. Определите радиус вписанной сферы.
26. В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю $2a$. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол β . Найдите площадь поверхности шара.
27. В шар вписан усеченный конус, высота которого равна 6 см . Определите объем шара, если сферические поверхности шаровых сегментов, отсекаемых от шара основаниями усеченного конуса, равны $10\pi \text{ см}^2$ и $30\pi \text{ см}^2$.
28. Радиус сферической поверхности шарового сектора равен R , а хорда, стягивающая дугу осевого сечения, равна $2a$. Определите площадь поверхности шара, вписанного в сектор.
29. В шаровой сектор вписан шар, радиус которого 5 см . Хорда, стягивающая дугу осевого сечения шарового сектора, равна 16 см . Найдите сферическую поверхность шарового сектора.
30. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны a . Найдите поверхность сферы, вписанной в эту пирамиду.
31. В шар вписана треугольная призма, все ребра которой равны a . Радиус шара, проведенный в вершину основания, образует с плоскостью основания призмы угол α . Найдите объем шара.
32. Около треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно a , описан шар. Найдите объем шара, если плоские углы при вершине пирамиды прямые.
33. Основанием пирамиды является квадрат со стороной a . Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а большее боковое ребро составляет с основанием угол α . Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

6.3. Ответы и указания

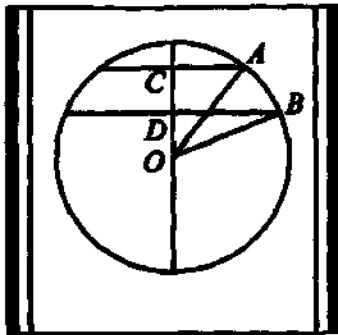
1. $676\pi \text{ см}^2$.

Рис. 268

Указание:

- 1) $OA = OB = R$ – радиус сферы, $AC = R_1$, $DB = R_2$ – радиусы сечений, $DC = 7$ (рис. 268);
- 2) $10\pi = 2\pi R_1$, $24\pi = 2\pi R_2 \Rightarrow R_1 = 5$, $R_2 = 12$;
- 3) $DO = x$, $CO = 7 + x$;
- 4) $OA^2 = OC^2 + CA^2 = (x + 7)^2 + 25$,
 $OB^2 = DO^2 + DB^2 = x^2 + 144$;
- 5) $(x + 7)^2 + 25 = x^2 + 144 \Rightarrow x = 5$;
- 6) $R^2 = 169$, $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 676\pi$.

2. $4\pi(R_1^2 + R_2^2)$.

3. 4 см, 5 см.

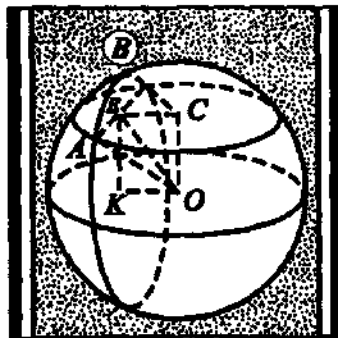


Рис. 269

Указание:

- 1) O – центр шара, C , K – центры сечений, $AB = 6$, $AE = BE = 3$, $\pi R^2 = \pi OA^2 = 50\pi$, $R^2 = 50$, $\pi BC^2 = 25\pi$, $BC = 5$ (рис. 269);
- 2) $\triangle BEC$, $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 4$,
 $OK = EC = 4$;
- 3) $\triangle AEO$, $EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{41}$;
- 4) $\triangle OCE$, $CO = \sqrt{OE^2 - EC^2} = 5$, CO и OK – искомые расстояния.

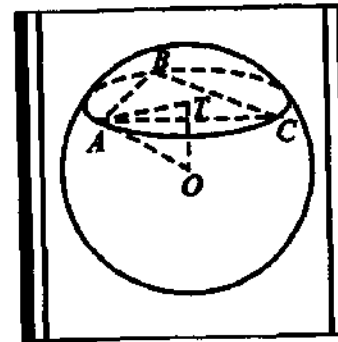
4. $\frac{14}{3} \text{ см}$.

Рис. 270

Указание:

- 1) O – центр сферы, T – центр сечения,
 $OT \perp (ABC)$, $OT = \frac{7}{3}$, $AB = 5$,
 $BC = 7$, $AC = 8$ (рис. 270);
- 2) $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = 10\sqrt{3}$;
- 3) $AT = R_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$;

$$4) \triangle ATO, AO = R_{\text{сферы}} = \sqrt{AT^2 + TO^2} = \frac{14}{3}.$$

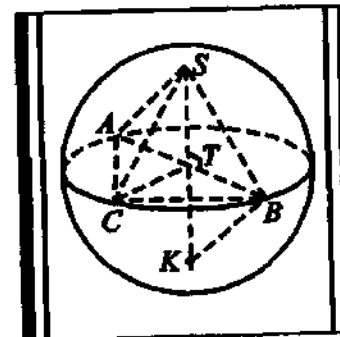
5. $1600\pi \text{ см}^2$. 6. 12 см.7. $\frac{c}{2 \sin 2\alpha}$.

Рис. 271

Указание:

- 1) $\angle SAT = \angle SBT = \angle SCT = \alpha$,
 $AT = TB$, $ST \perp (ABC)$, SK – диаметр сферы, $SK = 2R$ (рис. 271);
- 2) $\triangle STB$, $SB = \frac{TB}{\cos \alpha} = \frac{c}{2 \cos \alpha}$,
 $ST = TB \tan \alpha = \frac{c}{2} \tan \alpha$;
- 3) $\triangle SBK$, $SB^2 = ST \cdot SK$,
 $\frac{c^2}{4 \cos^2 \alpha} = 2R \frac{c}{2} \tan \alpha \Rightarrow R = \frac{c}{4 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{c}{2 \sin 2\alpha}$.

8. 2 см.

9. 8 см.

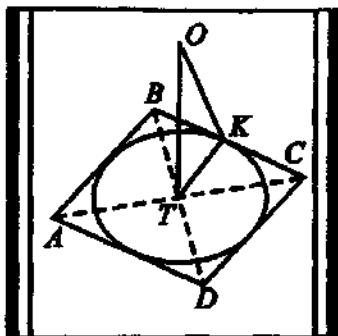


Рис. 272

Указание:

- 1) O – центр сферы, K – точка касания, $OT \perp (ABCD)$, $TK \perp BC$, $BD = 15$, $AC = 20$, $OK = 10$ (рис. 272);

$$2) S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 150,$$

$$S_{BTC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{75}{2};$$

$$3) \Delta BTC, BC = \sqrt{BT^2 + TC^2} = \frac{25}{2};$$

$$4) S_{BTC} = \frac{1}{2} BC \cdot TK \Rightarrow TK = \frac{2S_{BTC}}{BC} = 6;$$

$$5) \Delta OTK, OT = \sqrt{OK^2 - TK^2} = 8.$$

10. 1 см.

11. 12 см.

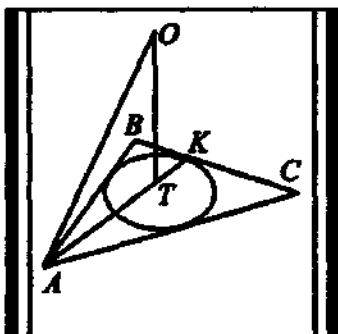


Рис. 273

Указание:

- 1) $AB = AC = 15$, $BC = 24$, O – центр сферы, T – центр вписанной окружности, K – точка касания, $BK = KC$, $OT \perp (ABC)$, $OA = 13$ (рис. 273);

$$2) \Delta AKC, AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = 9;$$

$$3) S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 108;$$

$$4) TK = r_{\text{впис.окр.}} = \frac{2S_{ABC}}{P} = 4,$$

$$AT = AK - TK = 5;$$

$$5) \Delta ATO, OT = \sqrt{AO^2 - AT^2} = 12.$$

12. $2500\pi \text{ см}^2$.

$$13. \frac{32\pi a^3}{81}.$$

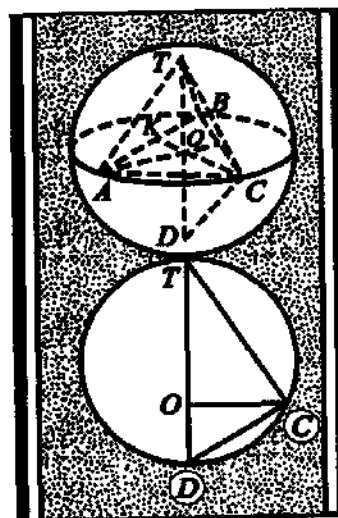


Рис. 274

Указание:

- 1) O – центр ABC , TO – высота пирамиды, $AB = TO = a$, TD – диаметр шара (рис. 274);

- 2) ΔAKC ,

$$CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$3) OC = \frac{2}{3} CK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$4) \Delta TOC, TC = \sqrt{TO^2 + OC^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}};$$

$$5) \Delta TDC, TC^2 = TO \cdot TD \Rightarrow$$

$$TD = 2R = \frac{TC^2}{TO} = \frac{4a}{3}, R = \frac{2a}{3};$$

$$6) V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{81}.$$

$$14. 4\pi a^2.$$

$$15. \frac{8\pi}{3(2 + \sqrt{3})}.$$

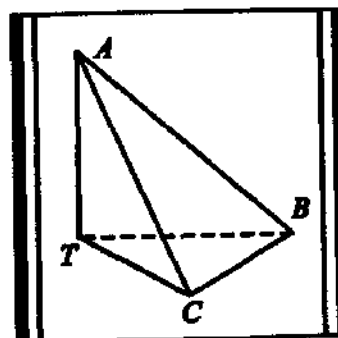


Рис. 275

Указание:

- 1) $S_{TBC} = S_{TBA} = S_{TAC} = 2$, V – объем пирамиды, S – полная поверхность, r – радиус вписанной сферы (рис. 275);

$$2) S^2_{ABC} = S^2_{TBA} + S^2_{TBC} + S^2_{TAC},$$

$$S^2_{ABC} = 12, S_{ABC} = 2\sqrt{3};$$

$$3) \frac{1}{2} TB \cdot TA = 2, \frac{1}{2} TB \cdot TC = 2,$$

$$\frac{1}{2} TC \cdot TA = 2 \Rightarrow \frac{1}{8} (TA \cdot TB \cdot TC)^2 = 8,$$

$$TA \cdot TB \cdot TC = 8;$$

$$4) V = \frac{1}{6}(TA \cdot TB \cdot TC) = \frac{4}{3}, r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{2}{3 + \sqrt{3}};$$

$$5) S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{4}{(3 + \sqrt{3})^2} = \frac{8\pi}{3(2 + \sqrt{3})}.$$

$$16. \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

$$17. \frac{52\pi R^3}{81}.$$

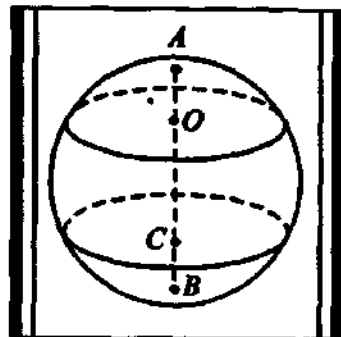


Рис. 276

Указание:

1) V_1 – объем шарового сегмента высоты $h_1 = OA = \frac{2R}{3}$, V_2 – объем шарового сегмента высоты $h_2 = CA = \frac{4R}{3}$, V – объем шарового слоя (рис. 276);

$$2) V_1 = \pi h_1^2 \left(R - \frac{1}{3}h_1\right) = \frac{28\pi R^3}{81},$$

$$V_2 = \pi h_2^2 \left(R - \frac{1}{3}h_2\right) = \frac{80\pi R^3}{81};$$

$$3) V = V_2 - V_1 = \frac{52\pi R^3}{81}.$$

$$18. \frac{448\pi}{3} \text{ см}^2, \frac{52\pi}{3} \text{ см}^2.$$

$$19. 36\pi \text{ см}^3.$$

$$20. \frac{\pi a^3}{6} \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}.$$

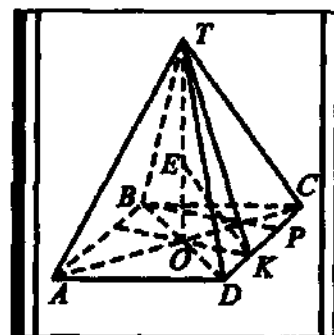


Рис. 277

Указание:

1) $OK \perp DC$, $\angle OKT = \beta$, $BC = a$, $\angle BCD = \alpha$, E – центр шара, EK – биссектриса угла OKT , $BP \perp DC$;

2) $\triangle BPC$, $BP = BC \sin \alpha = a \sin \alpha$, $OK = \frac{BP}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha$ (рис. 277);

3) $\triangle EOK$,

$$OE = r = OK \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2};$$

$$4) V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6} \sin^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2}.$$

$$21. \frac{\pi}{H^2} (H^2 + r^2)^2.$$

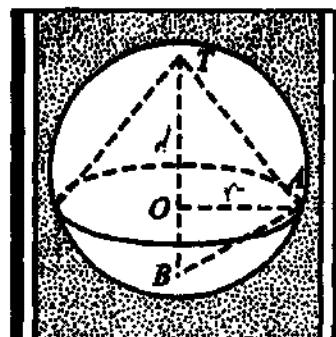


Рис. 278

Указание:

1) $TB = 2R$ – диаметр шара, O – центр основания конуса, $TO = H$, $OA = r$ (рис. 278);

2) $\triangle TOA$,

$$TA = \sqrt{TO^2 + OA^2} = \sqrt{H^2 + r^2};$$

3) $\triangle TAB$ ($\angle TAB = 90^\circ$), $TA^2 = TO \cdot TB$,

$$H^2 + r^2 = H \cdot 2R, R = \frac{H^2 + r^2}{2H};$$

$$4) S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 = \frac{\pi(H^2 + r^2)^2}{H^2}.$$

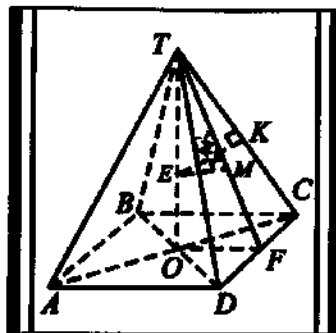
22. $1600\pi \text{ см}^2$.

Рис. 279

Указание:

1) $DF = FC$, E – центр вписанного шара, $EK \perp TC$, $EM \perp TF$, $EO = EM = 5$, $EK = 7$, $ET = x$ (рис. 279);

2) $\triangle TOC \sim \triangle TKE \Rightarrow EK : OC = TK : TO$
 $\Rightarrow OC = \frac{7(x+5)}{\sqrt{x^2-49}}$;

3) $\triangle OFC$, $OC^2 = 2OF^2 \Rightarrow$
 $OF = \frac{OC}{\sqrt{2}} = \frac{7(x+5)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-49}}$;

4) $\triangle TOF \sim \triangle TME \Rightarrow OF : EM = TO : TM$,

$$\frac{7(x+5)}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2-49}} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-25}} \Rightarrow x = 35, TO = x+5 = 40;$$

$$5) S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{TO}{2}\right)^2 = 1600\pi.$$

23. $64\pi \text{ см}^2$.

$$24. \frac{4\pi a^2 b^2}{2a^2 + b^2}.$$

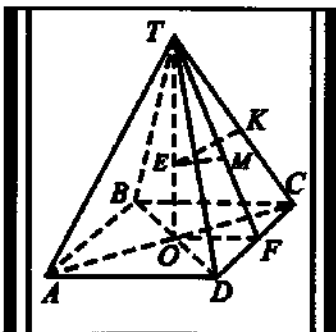


Рис. 280

Указание:

1) $DF = FC$, E – центр шара, $EK \perp TC$, $EM \perp TF$, $TE = a$, $EK = b$, $EM = EO = x$ (рис. 280);

2) $\triangle TOC \sim \triangle TKE$, $EK : OC = TK : TO$,
 $b : OC = \sqrt{a^2 - b^2} : (a+x)$,

$$OC = \frac{b(a+x)}{\sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$3) OC^2 = 2OF^2 \Rightarrow OF = \frac{b(a+x)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$4) \triangle TOF \sim \triangle TME \Rightarrow OF : EM = TO : TM,$$

$$\frac{b(a+x)}{\sqrt{2}x\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 b^2}{2a^2 - b^2};$$

$$5) S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 = 4\pi x^2 = \frac{4\pi a^2 b^2}{2a^2 - b^2}.$$

25. 3 см.

$$26. \frac{4\pi a^2}{\sin^2 2\beta}.$$

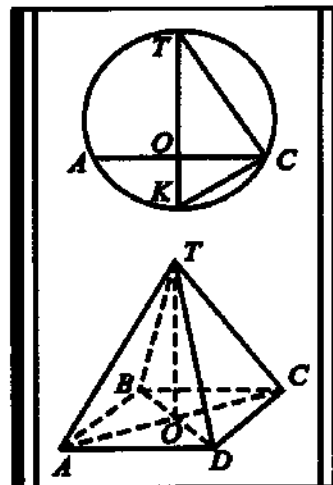


Рис. 281

Указание:

1) $AC = 2a$, O – центр основания, TO – высота пирамиды, $\angle TCO = \beta$,

$TK = 2R$ – диаметр шара;

2) $\triangle TOC$, $TO = OC \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{tg} \beta$,

$$TC = \frac{OC}{\cos \beta} = \frac{a}{\cos \beta} \text{ (рис. 281);}$$

3) $\triangle TCK$, $TC^2 = TO \cdot TK$,

$$\frac{a^2}{\cos^2 \beta} = 2R(a \operatorname{tg} \beta) \Rightarrow$$

$$R = \frac{a}{2 \cos \beta \sin \beta} = \frac{a}{\sin 2\beta};$$

$$4) S_{\text{ш}} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi a^2}{\sin^2 2\beta}.$$

$$27. \frac{500\pi}{3} \text{ см}^3.$$

$$28. \frac{4\pi a^2 R^2}{(R+a)^2}.$$

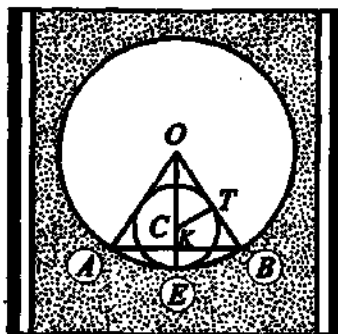


Рис. 282

Указание:

- 1) $AB = 2a$, $OB = OE = R$, $CT \perp OB$,
 $CT = CE = x$ (рис. 282);
- 2) $\triangle OTC \sim \triangle OKB \Rightarrow CT : KB = OC : OB$,
 $x : a = (R - x) : R$, $x = \frac{aR}{R+a}$;
- 3) $S_{\text{сферы}} = 4\pi x^2 = \frac{4\pi a^2 R^2}{(R+a)^2}$.

$$29. \frac{640\pi}{3} \text{ см}^2.$$

$$30. \frac{4\pi a^2}{(\sqrt{3}+3)^2}.$$

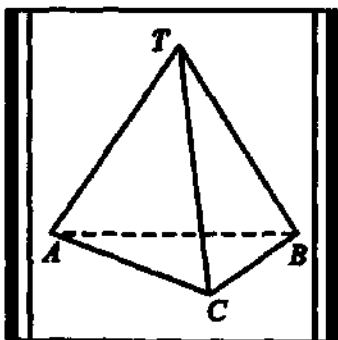


Рис. 283

Указание:

- 1) $S^2_{ABC} = 3S^2_{TBC} = 3\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 = \frac{3}{4}a^4$,
 $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (рис. 283);
- 2) $S_{\text{полн}} = S_{ABC} + 3S_{TBC} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 =$
 $= \frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+3)$;
- 3) $V_{TABC} = \frac{1}{3}S_{TBC} \cdot TA = \frac{1}{6}a^3$;
- 4) $r = \frac{3V_{TABC}}{S_{\text{полн}}} = \frac{\frac{1}{2}a^3}{\frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+3)} = \frac{a}{\sqrt{3}+3}$;
- 5) $S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = \frac{4\pi a^2}{(\sqrt{3}+3)^2}$.

$$31. \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27 \cos^3 \alpha}.$$

$$32. \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$33. \frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

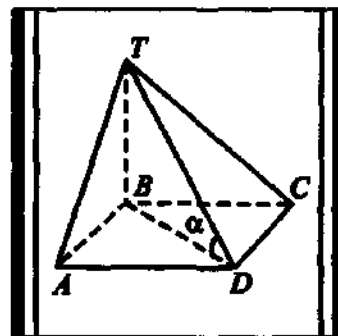


Рис. 284

Указание:

- 1) $\angle ABT = \angle TBC = 90^\circ$, $\angle TDB = \alpha$,
 $AB = a$ (рис. 284);
- 2) $\triangle TBD$, $TB = BD \operatorname{tg} \alpha = a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$;
- 3) $\triangle TBA$,
 $TA = \sqrt{AB^2 + TB^2} = a\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$;
- 4) $S_{\text{полн}} = S_{ABCD} + 2S_{TBA} + 2S_{TAD} =$
 $= a^2 + TB \cdot AB + TA \cdot AD =$
 $= a^2 + a^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha + a^2 \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$;
- 5) $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot TB = \frac{1}{3}a^3 \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$;
- 6) $r = \frac{3V}{S_{\text{полн}}} = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

Литература

- 1) Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. – Сборник конкурсных задач по математике. – М.: Наука, 1983.
- 2) Лоповок Л.М. Сборник задач по стереометрии – М.: Учпедгиз, 1959.
- 3) Парахневич В.А., Парахневич Е.В. Сборник задач по геометрии – Мн.: Народная асвета, 1972.
- 4) Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. – Задачи по стереометрии – М.: Наука, 1989.

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебника при получении	Отметка ученику за пользование учебником
1997/1998	Тимошенко Т.		
1998/1999			
2000/2001	Тимошенко Т.		
1			

Учебное издание

**Шлыков Владимир Владимирович
Валаханович Татьяна Владимировна**

Задачи по стереометрии

Учебное пособие для 10 – 11 классов
общеобразовательной школы
с русским языком обучения

Спецредактор *В.В. Шлыкова*

Редактор *Е.П. Горелик*

Художественный редактор *А.А. Кулаженко*

Корректор *О.Е. Хвойницкая*

Компьютерная верстка *Л.В. Эгировская*

Подписано в печать с оригинал-макета 15.12.97. Формат 60х90^{1/16}. Бумага офсетная № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 15,00. Усл. кр.-отт. 15,50. Уч.-изд. л. 8,86. Тираж 112100 экз. Заказ 3266.

Общество с ограниченной ответственностью «Асар». Лицензия ЛВ № 85 от 04.12.97. 220004, Минск, ул. Романовская Слобода, 5.

Минская фабрика цветной печати. 220024, Минск, ул. Корженевского, 20.